

Exercice 1: Paradoxe des anniversaires: ([SKA ALG] 1.5 p. 16)

Quel est le nombre minimum de personnes dans une classe pour que la probabilité que 2 d'entre elles aient le même anniversaire dépasse 70%? (En admettant que tous les anniversaires sont équiprobables et en ignorant les années bissextiles).

Exercice 2: Colorations d'un collier de perles:

Quel est le nombre de colliers possibles de 5 perles, où chaque perle peut prendre n couleurs différentes?

(On pourra redémontrer la formule de Burnside au préalable).

Exercice 3: Nombre d'applications croissantes: ([SKA ALG] 1.8 p. 18, [FRA] 5 p. 160)

Soient $m, p \in \mathbb{N}$. On note Υ_m^p le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; m \rrbracket$. On pose la convention suivante: $\Upsilon_m^0 = 1$.

Calculer Υ_m^m .

Exercice 4: Nombres de Bell (DEV) ([X-ENS ALG I] 1.6 p. 14, [KET] p. 267)

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{B}_m le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1; m \rrbracket$, avec par convention $\mathcal{B}_0 = 1$.

① Calculer $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$.

Exprimer \mathcal{B}_{m+1} en fonction des $\mathcal{B}_k, k \in \llbracket 1; m \rrbracket$.

② On pose $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{B}_m}{m!} x^m$. Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est non nul, et calculer $f(x)$ pour $x \in]-R; R[$.

③ Exprimer \mathcal{B}_m comme somme d'une série.

Exercice 5: Dénombrement sur un corps fini et application au Double: ([SKA] 5.14 p. 16)

Soit p un nombre premier et $m \in \mathbb{N}^*$.

① Combien y a-t-il de droites dans l'e.v. \mathbb{F}_p^m ? Et combien d'hyperplans?

② Combien y a-t-il de systèmes libres à k éléments dans l'espace \mathbb{F}_p^m ? Combien y a-t-il de bases?

③ Combien y a-t-il de sous-e.v. de dimension k dans \mathbb{F}_p^m ($k \in \llbracket 0; m \rrbracket$)?

④ Le jeu de Double consiste en 57 cartes, chacune comportant 8 symboles, et chaque couple de cartes a 1 et 1 seul symbole en commun. Proposer un moyen de construction du jeu. Combien de fois apparaît chaque symbole?