402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

Exercice n°1 : [DAN] p. 81-82

Le but de cet exercice est la recherche des réels θ pour lesquels les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n = \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad v_n = \sin(n\theta)$$

1. a) Écrire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(u_{n+1} - u_{n-1})$ en fonction de v_n.
   b) Écrire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(v_{n+1} - v_{n-1})$ en fonction de u_n.
2. Conclure en discutant selon les valeurs de $\sin(\theta)$.

Exercice n°2 : Cesàro [HAU] 6.8 & 6.9 p. 104-105

1. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad x_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad y_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

   Étudier la convergence de ces suites.

2. De même avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad x_n = n(1+(-1)^n) \quad \text{et} \quad y_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Exercice n°3 : Série des inverses des nbs premiers (DÉV) [SKA AlG] 2.18 q.3

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
2. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}.$$

3. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$ diverge.

Exercice n°4 : Série harmonique [GOU An] p. 211 & [FRE MPSI] p. 89

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit un entier $k \geq 2$. Montrer que $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$.
3. Montrer que la suite de terme général $h_n - \ln(n)$ est convergente. On notera γ sa limite (c'est la cste d'Euler, $\approx 0,577$).
4. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice n°5 : Formule de Stirling [GOU An] p. 219

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^n \cdot e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.

1. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire l'existence de $K \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} K\sqrt{n} \cdot n^n e^{-n}$.
2. Calculer K en utilisant la formule de Wallis.