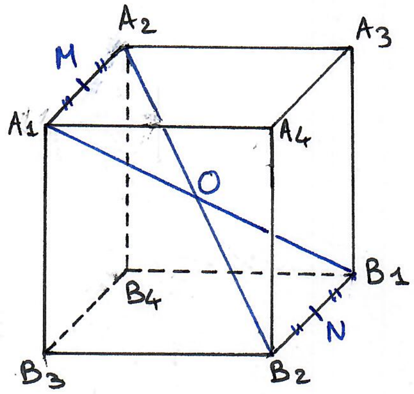
Groupe des isométries du cube

Recasages :
- 102 : Gpes monogènes, gpes cycliques. Exemples.
- 125 : Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, décomposition canonique. Applications.
- 128 : Barycentres, applications.
- 131 : Applications affines en dimension finie. Pptés et exemples.
- 158 : Gpe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 326 : Exercices faisant intervenir la notion de barycentre ou d'application affine.
- 339 : Exemples d'étude des isométries laissant invariantes une partie du plan, une partie de l'espace.
- 356 : Exercices utilisant les permutations d'un ens. fini.

Source(s) :
- Karmati, Dev 1 p. 331
- Skandalis, p. 335 et 355



$C = \{A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4\}$

① Montrons que $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq S_4$:

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des 4 grandes diagonales du cube : $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_4\}$ avec $D_i = [A_i B_i]$

Rmq : on peut parler d'une isométrie aussi bien sur les points de C que sur les segments de $\mathcal{D}$ car les isométries conservent les barycentres.

- $\mathcal{D}$ est stable par $\mathrm{Isom}^+(C)$ car les isométries conservent les distances, et les éléments de $\mathcal{D}$ sont caractérisés par le fait d'être la plus gde distance possible de C.

- Donc $\begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}^+(C) \times \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (f, D_i) & \longmapsto & f(D_i) \end{array}$ est une action de groupe de morphisme associé :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Isom}^+(C) & \longrightarrow & S(\mathcal{D}) \\ f & \longmapsto & \varphi_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ D_i & \longmapsto & f(D_i) \end{array} \end{array}}$$

On veut donc montrer que φ est un isomorphisme. Il suffit d'utiliser 2 des 3 arguments suivants :
- → φ est surjectif
- → φ est injectif
- → $\mathrm{Card}(\mathrm{Isom}^+(C)) = \mathrm{Card}(S(\mathcal{D}))$

Selon la leçon, choisir les arguments les plus intéressants/adaptés !

a) φ est surjectif :

$S(D)$ est engendré par les transpositions, donc il suffit de montrer que toute transposition a un antécédent par φ :

Sans perte de généralité, considérons $(D_1\ D_2) \in S(D)$:

$$\varphi(f) = (D_1\ D_2) \Rightarrow f = r_{(MN),\pi} \in Isom^+(C).$$

Donc $(D_1\ D_2)$ a pour antécédent $r_{(MN),\pi}$.

b) φ est injectif :

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in Ker(\varphi)$ telle que $f \neq id_{\mathbb{R}^3}$.

- $f \in Ker(\varphi) \Rightarrow \varphi_f = id_{S(D)} \Rightarrow \forall i \in [\![1;4]\!],\ f(D_i) = D_i$ (*)
- Or $f \neq id_{\mathbb{R}^3}$, donc $\exists i \in [\![1;4]\!]$ tel que $f(A_i) \neq A_i$. Sans perte de généralité, supposons que $f(A_1) \neq A_1$. Donc $f(A_1) = B_1$ d'après (*)
- $f(A_2) \in \{A_2, B_2\}$ par (*) :
  - → Si $f(A_2) = A_2$ alors :
    $$d(f(A_1), f(A_2)) = d(B_1, A_2) \neq d(A_1, A_2).$$
    Or f conserve les distance, donc c'est absurde.
  - → Donc $f(A_2) = B_2$.
  - → De même : $f(A_3) = B_3$ et $f(A_4) = B_4$.
- Soit s_O la symétrie de centre O :
  $$s_O \circ f(A_i) = A_i \quad \forall i \in [\![1;4]\!]$$
  Or f est affine, donc elle conserve les barycentres, donc :
  $$O = \text{isobarycentre}(\{A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4\}) = \text{isobarycentre}(\{f(A_1), \dots, f(A_4), f(B_1), \dots, f(B_4)\}) = f(O).$$
  D'où $s_O \circ f(O) = s_O(O) = O$, donc $s_O \circ f$ fixe le repère affine (O, A_1, A_2, A_3). Or $id_{\mathbb{R}^3}$ aussi, et si deux applications affines coincident sur un repère affine, alors elles sont égales.
  D'où : $s_O \circ f = id_{\mathbb{R}^3}$.
  D'où : $\underbrace{\det(s_O)}_{-1} \times \det(\vec{f}) = \underbrace{\det(id_{\mathbb{R}^3})}_{1} \Rightarrow \det(\vec{f}) = -1$
  Ce qui est absurde, car on a supposé que $f \in Isom^+(C)$.
  Donc $\underline{f \in Ker(\varphi) \Rightarrow f = id_{\mathbb{R}^3}}$.

c) <u>$\mathrm{Card}(\mathrm{Isom}^+(C)) = \mathrm{Card}(S(D))$</u> :

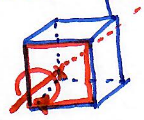
- $\mathrm{Card}(D) = 4$ donc $\mathrm{Card}(S(D)) = \mathrm{Card}(S_4) = 4! = 24$.
- L'action peut être considérée :
  - * Sur les faces
  - * Sur les arêtes
  - * Sur les sommets

Dans tous les cas, elle est transitive (on peut passer de n'importe quelle face à n'importe quelle autre par rotation, idem pour les arêtes ou les sommets), donc il n'y a qu'une seule orbite, de cardinal :

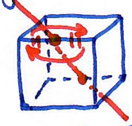
- * 6 pour les faces
- * 12 pour les arêtes
- * 8 pour les sommets

Considérons les stabilisateurs :

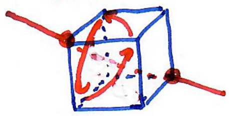
- * Pour les faces, il s'agit des 4 rotations d'axe perpendiculaire à cette face et d'angle $k\frac{\pi}{2}$, $k \in [\![0;3]\!]$:



- * Pour les arêtes, il s'agit de l'identité et de la symétrie de centre le milieu de l'arête, donc 2 possibilités :



- * Pour les sommets, il s'agit des 3 rotation d'axe $k \cdot \frac{2\pi}{3}$, $k \in [\![0;2]\!]$ et d'axe la grande diagonale passant par ce sommet :



Dans tous les cas, on utilise la formule suivante :

$|G| = |\Theta_x| \cdot |G_x|$ avec ici $G = \mathrm{Isom}^+(C)$ et selon le cas choisi :

- → si x est une <u>face</u> : $|\Theta_x| \times |G_x| = 6 \times 4 = 24$
- → si x est une <u>arête</u> : $|\Theta_x| \times |G_x| = 12 \times 2 = 24$
- → si x est un <u>sommet</u> : $|\Theta_x| \times |G_x| = 8 \times 3 = 24$

On trouve bien dans tous les cas :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Isom}^+(C)) = 24 = \mathrm{Card}(S(D)).$$

<u>Rmq</u> : Il ne faut évidemment pas faire les 3 cas dans le développement mais en choisir un des 3.

Avec 2 des 3 arguments précédents, on a donc prouvé que : $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq S_4$.

② Montrons que $\mathrm{Isom}(C) \simeq \mathrm{Isom}^+(C) \times \{id_{\mathbb{R}^3}, s_0\}$:

Soit $\psi : \mathrm{Isom}(C) \longrightarrow \mathrm{Isom}^+(C) \times \{id_{\mathbb{R}^3}, s_0\}$

$$f \longmapsto \begin{cases} (f, id_{\mathbb{R}^3}) \text{ si } f \in \mathrm{Isom}^+(C) \\ (f \circ s_0, s_0) \text{ si } f \in \mathrm{Isom}^-(C) \end{cases}$$

- s_0 commute avec toute application $f \in \mathrm{Isom}(C)$ car :
  - → $f(O) = O$ car O est l'isobarycentre de C et f conserve les barycentres
  - → le conjugué d'une symétrie de centre O par f est une symétrie de centre $f(O)$

  Donc $f \circ s_0 \circ f^{-1} = s_{f(O)} = s_0$.

  Donc ψ est un morphisme.

- ψ est bijectif d'inverse : $\mathrm{Isom}^+(C) \times \{id_{\mathbb{R}^3}, s_0\} \longrightarrow \mathrm{Isom}(C)$

$$(g, h) \longmapsto g \circ h \quad .$$

Finalement :

$$\mathrm{Isom}(C) \simeq \underbrace{\mathrm{Isom}^+(C)} \times \underbrace{\{id_{\mathbb{R}^3}, s_0\}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Isom}(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$