Théorème de d'Alembert-Gauss.
Théorème fondamental de l'algèbre.

<u>Thm</u> : Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

<u>Recasages</u> : • Leçons sur les polynômes (dont 168)
• Leçon sur la compacité ?

<u>Sources</u> : • Skandalis, p. 103-104
• Gourdon, p. 84-85

• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, de degré $n \geqslant 1$. On note $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

On considère la fonction polynôme associée :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad \frac{P(z)}{z^n} = a_n + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^{i-n}}_{\xrightarrow[|z| \to +\infty]{} 0} \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} a_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$$

Donc $K = \{ z \in \mathbb{C} \mid |P(z)| \leqslant |P(0)| \}$ est borné.

• Or K est l'image réciproque de $\mathcal{B}_F(0, |P(0)|)$ qui est un fermé.

<u>Pté</u> : $f : X \to Y$ continue $\Leftrightarrow$ f^{-1}(ouvert de Y) est un ouvert de X.
$\Leftrightarrow$ f^{-1}(fermé de Y) est un fermé de X.

Donc K est un fermé borné de $\mathbb{C}$, donc <u>K est compact</u>.

[Les parties compactes de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont les parties fermées et bornées.

• $0 \in K$ donc $K \neq \emptyset$.

$\varphi : K \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |P(z)|$ est continue, or : <u>Pté</u> : Une fonction continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ a une image compacte.

Tout compact est fermé et borné.

Donc $\varphi(K) \subset \mathbb{R}$ est compact, donc fermé et borné.

Donc φ atteint son minimum sur K :

$\exists \lambda \in K$ tel que $|P(\lambda)| \leqslant |P(z)| \quad \forall z \in K$.

Donc $|P(\lambda)| \leqslant |P(0)|$, donc $\forall z \in \mathbb{C} \setminus K$, $|P(\lambda)| \leqslant |P(z)|$

Donc φ admet un minimum global en λ.

Il reste à montrer que $|P(\lambda)| = 0$

Supposons par l'absurde que $|P(\lambda)| > 0$.

Posons $Q(X) = \dfrac{P(X+\lambda)}{P(\lambda)} = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$.

$b_0 = Q(0) = 1$ et $b_m \neq 0$, donc $k = \inf\{i \in [\![1;m]\!] \mid b_i \neq 0\}$ existe

et on peut écrire :

$$Q(z) = 1 + b_k z^k \Big(1 + \underbrace{\sum_{p=k+1}^{m} \frac{b_p}{b_k} z^{p-k}}_{\varphi(z)} \Big) \quad \text{avec} \quad \lim_{z \to 0} |\varphi(z)| = 0$$

Soit $\forall \varepsilon \in]0;1[$, $\exists r > 0$ tel que $\forall |z| < r$, $|\varphi(z)| < \varepsilon$.

Soit $z' = r \cdot e^{i\theta}$. On note $b_k = |b_k| e^{i\alpha}$.

Quitte à prendre r plus petit, supposons $|b_k| r^k < 1$. Alors :

$$|Q(z')| = \left| 1 + |b_k| r^k e^{i(\alpha + k\theta)} (1 + \varphi(z)) \right|$$

$$\leq \left| 1 + |b_k| r^k e^{i(\alpha+k\theta)} \right| + |b_k| r^k |\varphi(z)|$$

En choisissant $\theta = \dfrac{\pi - \alpha}{k}$: $e^{i(\alpha + k\theta)} = e^{i\pi} = -1$

$$\Rightarrow |Q(z')| \leq |\underbrace{1 - |b_k| r^k}_{>0}| + |b_k| r^k \varepsilon = 1 - |b_k| r^k + |b_k| r^k \varepsilon$$

$$\leq 1 - \underbrace{(1-\varepsilon)|b_k|}_{\in]0;1]} r^k < 1$$

Donc $\exists z' \in \mathbb{C}$ tq $|Q(z')| < 1 \iff |P(z'+\lambda)| < |P(\lambda)|$, ce qui est absurde.

Donc $|P(\lambda)| = 0$.

Donc P admet bien une racine dans $\mathbb{C}$.

<u>Conclusion</u> : Donc il existe Q tel que $P = (X-\lambda) \cdot Q$.

On applique le même résultat à Q, et au final on aura bien P scindé dans $\mathbb{C}$.