Dév : Résoudre $y''+y=|\sin|$ dans $\mathbb{R}$.

Recasages :
- 212 : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.
- 224 : Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x''+a(t)x'+b(t)x=c(t)$ où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
- 411 : Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
- 414 : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
- 428 : Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.

Source(s) :
- Ketrane, dév. 21 p. 274.
- MethodiX Analyse, p. 176 (pour les rappels sur les séries de Fourier).

On pose : $g : x \mapsto |\sin(x)|$.

1) Développement en série de Fourier de g :

- g est π-périodique, paire, continue, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, donc : et il y a convergence normale
  $S(g)=g$ (égale à sa série de Fourier)

Thm utilisé : Soit f continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. Alors la série de Fourier de f CVN vers f.

Déf : Coefficients de Fourier trigonométriques :
$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos(nt)\,dt \quad \& \quad b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin(nt)\,dt$$

- g est paire $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ b_n(g)=0$
- $a_0(g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin(t)|\cdot\underbrace{\cos(0\cdot t)}_{=1}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$. pas vraiment nécessaire vu + loin
- $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$a_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin(t)|\cdot\cos(nt)\,dt \overset{|\sin|\text{ est paire}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cdot\cos(nt)\,dt$$

Or $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin((n+1)t)=\sin(nt)\cos(t)+\cos(nt)\sin(t)\\ \sin((n-1)t)=\sin(nt)\cos(t)-\cos(nt)\sin(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin((n+1)t)-\sin((n-1)t)=2\cdot\cos(nt)\cdot\sin(t)$$

$$\Rightarrow a_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((n+1)t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((n-1)t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1}+\frac{\cos((n-1)t)}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow a_n(g)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right)$$

On a donc selon la parité :

$$\begin{cases} a_{2n+1}(g) = 0 \\ a_{2n}(g) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{2}{2n+1} - \dfrac{2}{2n-1}\right) = \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\cancel{2n}-1-\cancel{2n}-1}{(2n+1)(2n-1)} = \dfrac{-4}{\pi(4n^2-1)} \end{cases}$$

(donc $a_0(g) = \frac{4}{\pi}$)

• Or on a vu que : $S(g) = g$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n(g)\cdot\cos(nx) + \underbrace{b_n(g)}_{=0}\cdot\sin(nx)$$

Soit : $$\boxed{g(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}}$$

2 Solution de l'équation homogène associée :

$$y'' + y = 0$$

c'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, on utilise donc l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 1 = 0$$

Dont les solutions sont : $+i$ et $-i$.

D'où $$\boxed{S_H = \{x \mapsto a\cdot\cos(x) + b\cdot\sin(x) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}}$$

3 Solution particulière f 2π-périodique :

* Analyse : Supposons f solution de (E) : $y''+y = |\sin|$, 2 fois dérivable et 2π-périodique.

Ppté : Dérivation des coefficients de Fourier :
Si f est dérivable on a par IPP :
$a_n(f') = -n\cdot b_n(f)$ et $b_n(f') = n\cdot a_n(f)$.

On a alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{cases} a_n(f'') = -n\cdot b_n(f') = -n^2\cdot a_n(f) \\ b_n(f'') = n\cdot a_n(f') = -n^2\cdot b_n(f) \end{cases}$

De plus, f est développable en série de Fourier et on a :

$$\frac{\overbrace{a_0(f'')+a_0(f)}^{*}}{2} + \sum_{n\geq 1}\Big[\underbrace{a_n(f'')+a_n(f)}_{(1-n^2)a_n(f)}\Big]\cos(nx) + \Big[\underbrace{b_n(f'')+b_n(f)}_{(1-n^2)b_n(f)}\Big]\sin(nx) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(g)\cos(nx)$$

Soit :

$$\frac{(1-n^2)a_0(f) - a_0(g)}{2} + \sum_{n\geq 1}\Big[(1-n^2)a_n(f) - a_n(g)\Big]\cos(nx) + \Big[(1-n^2)b_n(f)\Big]\sin(nx) = 0$$

On a donc :

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad (1-n^2)\, b_n(f) = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \quad (1-n^2)\, a_n(f) = a_n(g)$ soit $\begin{cases} (1-(2n+1)^2)\, a_{2n+1}(f) = 0 \\ (1-4n^2)\, a_{2n}(f) = -\dfrac{4}{\pi(4n^2-1)} \end{cases}$ (*)

Rmq : Pour $n=1$, (*) ne nous donne pas les valeurs de $a_1(f)$ et $b_1(f)$. En effet on a alors : $\begin{cases} (1-1^2)\cdot b_1(f) = 0 \iff 0 \cdot b_n(f) = 0 \\ (1-1^2)\, a_1(f) = 0 \iff 0 \cdot a_1(f) = 0 \end{cases}$

Mais $a_1(f)$ et $b_1(f)$ sont les coefficients devant $\cos(1x) = \cos(x)$ et $\sin(1x) = \sin(x)$. Or $(\cos(x), \sin(x))$ est une base de S_H, donc on peut choisir $a_1(f)$ et $b_1(f)$ quelconques. On prend $a_1(f) = b_1(f) = 0$.

On pose alors :

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}}$$

car (*) donne : $a_{2n}(f) = \dfrac{4}{\pi(4n^2-1)^2}$

* **Synthèse** : Vérifions que f convient :

- $\left| \dfrac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2} \right| \leq \dfrac{1}{(4n^2-1)^2}$ donc la série CVN sur $\mathbb{R}$.

Thm : CVU : $\begin{cases} u_n \text{ continue sur un intervalle } I \subset \mathbb{R} \\ \sum u_n \text{ CVU sur tout segment } [a,b] \subset I \end{cases} \Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur I.

- Série dérivée : $\sum \dfrac{-8n \cdot \sin(2nx)}{\pi(4n^2-1)^2}$
- Série dérivée seconde : $\sum \dfrac{-16n^2 \cdot \cos(2nx)}{\pi(4n^2-1)^2}$

Ces deux séries CVN sur $\mathbb{R}$ donc leurs sommes sont continues, donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

- Enfin :

$$f''(x) + f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-16n^2 \cdot \cos(2nx)}{\pi(4n^2-1)^2} + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{(1-4n^2)} \cdot \cos(2nx)}{(4n^2-1)^{\cancel{2}}} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} = |\sin(x)|$$

Donc f est bien solution particulière de l'équation différentielle.

4 **Solution générale** :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) + f(x) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$