Dév : Série des inverses des nombres premiers.

Recasages :
- 104 : Nombres premiers. Propriétés et applications.
- 302 : Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
- 305 : Exercices illustrant l'utilisation des nombres premiers.
- 402 : Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

Source(s) : • Skandalis Algèbre, ex. 2.14 p. 54

Énoncé :

① Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

② Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} \geqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

③ En déduire que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$ diverge.

① Infinité des nombres premiers :

Supposons par l'absurde qu'il y a un nombre fini n de nombres premiers. On peut alors poser : $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$.

On pose : $M = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) + 1$, et on a donc $M \notin \mathbb{P}$.

Comme M n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier :

$\exists k \in [\![1;n]\!]$ tel que $p_k | M$, soit $p_k \mid \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) + 1$.

Or $p_k \in \{p_i \mid i \in [\![1;n]\!]\}$, donc $p_k \mid \prod_{i=1}^{n} p_i$.

Donc $p_i | 1$, donc $p_i = 1$, ce qui est absurde car p_i est premier.

Donc il existe une infinité de nombres premiers.

② On note $\mathcal{B}_n^k = \{ p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \mid \forall i \in [\![1;k]\!],\ p_i \in \mathbb{P} \text{ et } \alpha_i \in [\![0;n]\!] \}$.

C'est un ensemble fini.

On pose :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{B}_{k-1}^{n} \times [\![0;n]\!] & \longrightarrow & \mathcal{B}_k^n \\ (q, \gamma) & \longmapsto & q \cdot p_k^{\gamma} \end{array}$$

Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, c'est une bijection. D'où :

$$A = \sum_{m\in\mathcal{B}_k^n} \frac{1}{m} = \left(\sum_{q\in\mathcal{B}_{k-1}^n} \frac{1}{q}\right) \times \left(\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{1}{p_k^{\gamma}}\right)$$

②

$$A = \left(\sum_{q \in \mathcal{B}_{K-1}^n} \frac{1}{q}\right) \times \frac{1 - p_K^{-(n+1)}}{1 - p_K^{-1}} \underset{\text{sur } K}{\overset{\text{récurrence}}{=}} \cdots = \prod_{i=1}^{K} \frac{(1 - p_i^{-1-n}) \times p_i}{(1 - p_i^{-1}) \times p_i} = \prod_{i=1}^{K} \frac{p_i - p_i^{-n}}{p_i - 1}$$

Or si on prend $\boxed{n \geqslant \log_2(K)}$*, alors $[\![1;K]\!] \subset \mathcal{B}_n^K$ et donc :

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{i} \leqslant \sum_{m \in \mathcal{B}_K^n} \frac{1}{m} = \prod_{i=1}^{K} \frac{p_i - p_i^{-n}}{p_i - 1} \underset{}{\overset{p_i - p_i^{-n} \leqslant p_i}{\leqslant}} \prod_{i=1}^{K} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

D'où l'inégalité recherchée.

③ Divergence de la série :

Par passage au ln (qui est croissant) :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{K} \frac{p_i}{p_i - 1}\right) \geqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{i}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{K} -\ln\left(\frac{p_i - 1}{p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{K} \ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \geqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{i}\right)$$

Or la série harmonique diverge donc $\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{i} \xrightarrow[K \to +\infty]{} +\infty$ et donc $\ln\left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{i}\right) \xrightarrow[K \to +\infty]{} +\infty$, d'où : $-\sum_{i=1}^{K} \ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \xrightarrow[K \to +\infty]{} +\infty$.

Or $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \sim \frac{1}{p_i}$, on a bien la divergence de la série des $\frac{1}{p_i}$.

---

* On souhaite avoir $p_1^n \cdots p_K^n \geqslant K$.

Il suffit de prendre $p_1^n \geqslant K$, soit $2^n \geqslant K$, d'où :

$$\ln(2^n) \geqslant \ln(K)$$

$$\Rightarrow n \cdot \ln(2) \geqslant \ln(K)$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(K)}{\ln(2)} = \log_2(K).$$