Dév : Formule de Burnside et collier de perles

Recasages :
- 101 : Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
- 123 : Isométries du plan affine euclidien, décomposition canonique. Applications.
- 142 : Utilisation des groupes en géométrie.
- 158 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 301 : Exercices sur les groupes.
- 307 : Exercices faisant intervenir des dénombrements.
- 339 : Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.

Source(s) :
- Ketrane, dév. 1 p. 200 (modifié)
- Skandalis Algèbre, p. 10

Énoncé : Soit G un groupe et E un ensemble qui agit dessus.

1. Démontrer la formule de Burnside :

$$|\Theta| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)| \quad \text{où} \quad \begin{cases} \Theta \text{ est l'ensemble des orbites} \\ \mathrm{fix}(g) \text{ est l'ensemble des points fixes de } E \text{ sous l'action de } g. \end{cases}$$

2. En déduire le nombre de colliers possibles de 5 perles, où chaque perle peut prendre n couleurs.

① On va calculer de 2 manières différentes le cardinal de l'ensemble :

$$K = \{(g,x)\in G\times E \mid g\cdot x = x\}$$

* D'une part :

$$|K| = \sum_{g\in G} |\{x\in E \mid g\cdot x = x\}| = \sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)|$$

* D'autre part :

stabilisateur de x

$$|K| = \sum_{x\in E} |\{g\in G \mid g\cdot x = x\}| = \sum_{x\in E} |G_x|$$

Or d'après le théorème de Lagrange on a :

$$|G_x| = \frac{|G|}{[G:G_x]}$$

On a également :

$$[G:G_x] = |\Theta_x| \rightarrow \text{en effet : } \varphi : \begin{array}{ccc} (G/G_x)_g & \longrightarrow & \Theta_x \\ gG_x & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$$ est bien définie et bijectif

En effet :

* si $g_1 G_x = g_2 G_x$, alors $\exists g \in G_x$ tq $g_1 \cdot 1_G = g_2 \cdot g$

  => en multipliant par x à droite : $g_1 \cdot \underbrace{1_G \cdot x}_{x} = g_2 \cdot \underbrace{g \cdot x}_{\substack{x \\ \text{car } g \in G_x}}$

  => $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$ => φ est bien définie.

* φ est surjective par construction

* $\varphi(g_1 G_x) = \varphi(g_2 G_x)$ => $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$ => $g_2^{-1}(g_1 \cdot x) = x$

  => $(g_2^{-1} g_1) \cdot x = x$ => $g_2^{-1} g_1 \in G_x$ => $g_1 \in g_2 G_x$

  => $\forall g \in G_x$, $g_1 g \in g_2 G_x$ => $G_1 \subseteq G_2$.

  Par symétrie, $G_1 = G_2$, donc φ est injective.

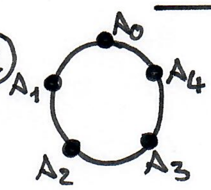
On a donc :

les orbites forment une partition de E

$$|K| = \sum_{x \in E} \frac{|G|}{|\Theta_x|} = \sum_{\Theta_x \in \Theta} \sum_{y \in \Theta_x} \frac{|G|}{|\Theta_x|} = \sum_{\Theta_x \in \Theta} \frac{|G|}{\cancel{|\Theta_x|}} \times \cancel{|\Theta_x|} = \sum_{\Theta_x \in \Theta} |G| = |G| \times |\Theta|$$

D'où : $\sum_{g \in G} |fix(g)| = |G| \times |\Theta|$ d'où le résultat recherché.

2



Sur le cercle, on réserve 5 emplacements $A_0, \dots, A_4$ régulièrement espacés.

* G est le groupe diédral d'ordre 10 (conserve le pentagone régulier).
* E est l'ensemble des colorations des 5 perles.

=> 1 orbite correspond donc à une coloration à rotation/réflexion près.

En appliquant la formule de Burnside :

$$|\Theta| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix(g)|$$

* $|G| = 10$
* $g = id$ => n^5 colorations sont fixes.
* 4 autres rotations => toutes les perles doivent avoir la même couleur
  => n colorations sont fixes.
* 5 réflexions => n^3 colorations sont fixes.

D'où $\boxed{|\Theta| = \frac{n^5 + 4n + n^3}{10}}$

Rmq : On peut allonger le développement en évoquant le cas à 4 perles, et plus généralement à d perles (en distinguant les cas pairs/impairs).