Dév : Calcul de la somme d'une série alternée.

- **Recasages** :
  - 203 : Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence.
  - (215) : Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
  - 404 : Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
  - 405 : Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
  - 408 : Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.

- **Source(s)** : • Ketrane, dév. 17 p. 260

Énoncé :

① Montrer que la suite $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(p)}{p} - \frac{1}{2}\ln^2(n)$ converge.

② En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n}$ en fonction de $\gamma = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N)$.

① Soit $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, de primitive $t \longmapsto \frac{\ln^2(t)}{2}$.

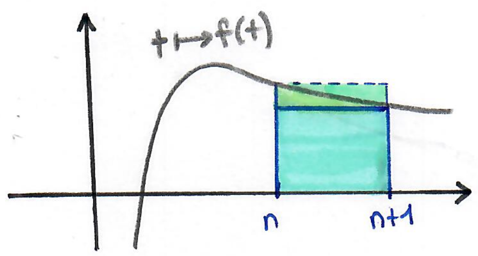
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$.

Or $t > e \Rightarrow \ln(t) > \ln(e) = 1 \Rightarrow f'(t) < 0$, donc f décroît sur $[3;+\infty[$, d'où l'idée d'utiliser une comparaison série-intégrale.

Rappel : Soit $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

- f croissante $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leq f(n) \leq \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt$
- f décroissante $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{n}^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$

En sommant ces inégalités, on obtient des encadrements des sommes partielles et restes des séries.



- Ainsi pour $n \geq 3$ on a :

$$\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(t)}{t} \geq \frac{\ln(n+1)}{n+1} \Rightarrow \frac{\ln(n)}{n} \geq \int_{n}^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt \geq \frac{\ln(n+1)}{n+1} \quad (*)$$

- $u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) + \frac{1}{2}\ln^2(n) = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\left[\ln^2(n+1) - \ln^2(n)\right]$

Or $\int_1^n \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_1^n = \frac{\ln^2(n)}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} = \int_1^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt - \int_1^n \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$$

D'où :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt \overset{(*)}{\leq} 0$$

$\Rightarrow$ $\underline{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroit}}$ à partir de 3.

- De plus on a aussi pour $n \geq 3$:

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \overset{(*)}{\geq} \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln^2(n+1) - \ln^2(3)\right]$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln^2(n) \geq \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2}\left[\underbrace{\ln^2(n+1) - \ln^2(n)}_{\geq 0} - \ln^2(3)\right]$$

$$\Rightarrow u_n \geq \frac{1}{2}\left[\ln(2) - \ln^2(3)\right]$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>décroissante et minorée</u> (à partir de 3), donc elle <u>converge</u> vers une limite que nous noterons ℓ.

---

2 On a par (*) que $\underline{\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$ pour $n \geq 3$.

De plus, $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

<u>Rappel</u> : <u>Critère spécial de convergence des séries alternées</u> :

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$ converge.

De plus, si on note (S_n) ses sommes partielles et (R_n) ses restes :

$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ et $\begin{cases} |R_n| \leq a_{n+1} \\ R_n \text{ est du signe de } (-1)^{n+1} \end{cases}$

D'après le critère spécial des séries alternées on a :

$$\sum (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n} \text{ converge.}$$

- $\forall N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \underbrace{\cancel{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(2n)}{\cancel{2}n}}_{\text{termes pairs en double}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln(n)}{n}}_{\text{tous les termes}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(2)+\ln(n)}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln(n)}{n}$$

$\forall N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n} = \ln(2) \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) + u_N + \underbrace{\frac{1}{2}\ln^2(N)} - u_{2N} \underbrace{- \frac{1}{2}\ln^2(2N)}$$

Or :

$$\frac{1}{2}\ln^2(N) - \frac{1}{2}\ln^2(2N) = \frac{1}{2}\left[\ln(N) - \ln(2N)\right]\left[\ln(N) + \ln(2N)\right] = \frac{1}{2}\left[\cancel{\ln(N)} - \ln(2) - \cancel{\ln(N)}\right]\left[\ln(N) + \ln(2) + \ln(N)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2)\left[\ln(2) + 2\ln(N)\right] = -\frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\ln(N)$$

$\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n} = \ln(2) \cdot \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) \right] + u_N - u_{2N} - \frac{\ln^2(2)}{2}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim\limits_{N \to +\infty} u_N - u_{2N} = \ell - \ell = 0 \\ \lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) = \gamma \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \cdot \ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2}}$$