Séquence 9 : Puissances

✎ ✎ ✎ **OBJECTIFS** : ✎ ✎ ✎

À la fin de cette Séquence 9, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Les définitions des puissances d'exposant positif ET négatif.	Cours partie A et B
Les propriétés de calcul des puissances.	Cours partie A
La forme d'un nombre en écriture scientifique.	Cours partie C

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Calculer la puissance d'un nombre (positive ou négative).	n°1, 4	n°2, 3	n°5
Utiliser les propriétés des puissances pour simplifier et effectuer des calculs.	n°6		n°7, 8
Calculer une puissance de 10 (positive ou négative).	n°9, 10	n°11	n°12
Reconnaître un nombre en écriture scientifique.	n°13		
Mettre un nombre en écriture scientifique.	n°14	n°15	
Résoudre des problèmes faisant appel aux puissances.	n°16	n°17	n°18
Exercices type Brevet.			n°19, 20

A) Puissances et propriétés

Définition 1 : Puissances

Si n est un *entier* ≥ 2, et si a est un *entier relatif*, alors on notera :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \qquad \text{ET} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple(s) :

- $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- $6^7 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 279\ 936$
- $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{5 \times 5} = \dfrac{1}{25} = 0,04$
- $6^{-7} = \dfrac{1}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6} = \dfrac{1}{279\ 936} \approx 0,000\ 003\ 5$

Propriété 1 : Cas particuliers

- Quel que soit a on a toujours $a^1 = a$
- Si $a \neq 0$ on a alors toujours $a^0 = 1$

Exemple(s) :

$5^1 = \mathbf{5}$ $\qquad 7^0 = \mathbf{1}$ $\qquad (-2)^1 = \mathbf{-2}$ $\qquad (-3)^0 = \mathbf{1}$

Propriété 2 : Calculer avec les puissances

$$a^m \times a^p = a^{m+p} \qquad \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \qquad (a^m)^p = a^{m \times p}$$

Remarque : Dans une expression sans parenthèses, on calcule les puissances **avant** les multiplications et les divisions !

$$-2^2 = -(2\times 2) = -4 \qquad \text{ALORS QUE} \qquad (-2)^2 = (-2)\times(-2) = +4$$

Démonstration :

- $7^5 \times 7^3 = \overbrace{7\times 7\times 7\times 7\times 7}^{5\text{ fois}} \times \overbrace{7\times 7\times 7}^{3\text{ fois}} = \overbrace{7\times 7\times\cdots\times 7}^{5+3\text{ fois}} = 7^{5+3}$
- $\dfrac{4^5}{4^2} = \dfrac{\cancel{4}\times\cancel{4}\times 4\times 4\times 4}{\cancel{4}\times\cancel{4}} = 4\times 4\times 4 = 4^3 = 4^{5-2}$
- $\left(9^2\right)^3 = (9\times 9)^3 = (9\times 9)\times(9\times 9)\times(9\times 9) = \overbrace{9\times 9\times\cdots\times 9}^{2\times 3\text{ fois}} = 9^{2\times 3}$

B) Puissances de 10

Définition 2 : Puissances de 10

Si n est un *entier strictement positif*, alors on notera :

$$10^n = \underbrace{10\times 10\times\cdots\times 10}_{n\text{ fois}} = 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ zéros}} \qquad \text{ET} \qquad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00\ldots0}_{n\text{ zéros}}1$$

Exemple(s) :

- $10^5 = 10\times 10\times 10\times 10\times 10 = 100\ 000$
- $10^{-9} = \dfrac{1}{10^9} = \dfrac{1}{10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10} = \dfrac{1}{1\ 000\ 000\ 000} = 0,000\ 000\ 001$

C) Écriture scientifique

Définition 3 : Écriture scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est une écriture de la forme $a \times 10^n$ avec :

- a un nombre décimal avec **1 seul chiffre non nul devant la virgule**
- n un nombre entier relatif

Exemple(s) :

Parmi les écritures suivantes, entoure celles qui sont bien des écritures scientifiques :

$\boxed{4,63\times 10^5}$	$0,256\times 10^3$	$15,358\times 10^7$	$\boxed{9,999\times 10^{25}}$
80×10^{-3}	$\boxed{4,007\ 6\times 10^{-62}}$	$\boxed{7\times 10^{-9}}$	$\boxed{1,01\times 10^{5\ 362}}$
$\boxed{8,99007\times 10^2}$	$3,4\times 10^{4,6}$	$56,3\times 10^{-6,8}$	$\boxed{6\times 10^{325}}$

Exemple(s) :

- Le rayon du soleil est de 695 000 km $= 6,95\times 10^5$ km.
- La vitesse de la lumière est de $2,997\ 924\ 58\times 10^8$ m/s $= 299\ 792\ 458$ m/s.
- L'atome d'actinide (un des plus gros) a un diamètre de $0,000\ 000\ 000\ 29$ m $= 2,9\times 10^{-10}$ m.

Exercices

☞ **Exercice 1 :** ☆

1) Écrire sous la forme d'une puissance d'un nombre :

a. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

b. $12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 12^{11}$

c. $0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,3^9$

d. $\dfrac{1}{6 \times 6 \times 6} = \dfrac{1}{6^3} = 6^{-3}$

e. $\dfrac{1}{1,2 \times 1,2 \times 1,2 \times 1,2 \times 1,2 \times 1,2} = \dfrac{1}{1,2^6} = 1,2^{-6}$

f. $\dfrac{2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{2^5} = 2^{-5}$

2) Effectue les calculs suivants :

a. $11^2 = 11 \times 11 = 121$

b. $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$

c. $6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$

d. $7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 16\ 807$

e. $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$

f. $7^2 = 7 \times 7 = 49$

g. $100^4 = 100 \times 100 \times 100 \times 100 = 100\ 000\ 000$

h. $1^{12} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

☞ **Exercice 2 :** ☆☆

1) Écrire sous la forme d'une puissance de 2 :

$8 = 2^3$ $\quad 16 = 2^4$ $\quad 64 = 2^6$ $\quad 512 = 2^9$

2) Écrire sous la forme d'une puissance de 3 :

$9 = 3^2$ $\quad 81 = 3^4$ $\quad 2\ 187 = 3^7$ $\quad 1 = 3^0$

3) Écrire sous la forme d'une puissance de 5 :

$25 = 5^2$ $\quad 1 = 5^0$ $\quad 625 = 5^4$ $\quad 5 = 5^1$

☞ **Exercice 3 :** ☆☆

Effectue les calculs suivants :

$-5^2 = -25$ $\quad (-5)^2 = 25$ $\quad (-5)^4 = 625$ $\quad -5^3 = -125$

$(-9)^3 = -729$ $\quad -2^8 = 256$ $\quad (-8)^2 = 64$ $\quad 10^{-6} = 0,000\ 001$

$(-986)^0 = 1$ $\quad 87\ 945^1 = 87\ 945$ $\quad (-1)^{58} = 1$ $\quad (-1)^{135} = -1$

☞ Exercice 4 : ☆

Pour chaque ligne, entoure la ou les réponse(s) exacte(s) :

		Réponses			Justification
		A	B	C	
n°1	« 3 puissance 4 » s'écrit :	3×4	3^4	4^3	
n°2	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ s'écrit :	5^5	6^5	5^6	
n°3	$(-10)^2$ est égal à :	-100	-20	100	
n°4	-10^2 est égal à :	-100	-20	100	
n°5	2^6 est égal à :	32	12	64	
n°6	$2,5^2$ est égal à :	5	$6,25$	$5,65$	
n°7	1^{100} est égal à :	100	0	1	
n°8	35^0 est égal à :	35	0	1	
n°9	0^{100} est égal à :	0	1	100	
n°10	$(-1)^6$ est égal à :	-1	1	6	
n°3	$(-1)^9$ est égal à :	-1	1	9	

☞ Exercice 5 : ☆☆☆

Calculer en détaillant les étapes :

1) $1+5^3=1+125=126$

2) $(1+5)^3=6^3=216$

3) $(2\times 10)^4=20^4=160\ 000$

4) $2\times 10^4=2\times 10\ 000=20\ 000$

5) $\left(1+2^3\right)^2=(1+8)^2=9^2=81$

Exercice 6 : ☆

Compléter le tableau suivant :

Règles	$a^n \times a^p = \mathbf{a^{n+p}}$	$\dfrac{a^n}{a^p} = \mathbf{a^{n-p}}$	$(a^n)^p = \mathbf{a^{n\times p}}$
n°1	$6^5 \times 6^3 = \mathbf{6^{5+3}} = \mathbf{6^8}$	$\dfrac{5^7}{5^2} = \mathbf{5^{7-2}} = \mathbf{5^5}$	$(4,8^2)^3 = \mathbf{4,8^{2\times3}} = \mathbf{4,8^6}$
n°2	$2^7 \times 2^4 = \mathbf{2^{7+4}} = \mathbf{2^{11}}$	$\dfrac{(-8)^{16}}{(-8)^{15}} = \mathbf{(-8)^{16-15}} = \mathbf{(-8)^1}$	$(13^4)^{-4} = \mathbf{13^{4\times(-4)}} = \mathbf{13^{-16}}$
n°3	$7^5 \times \mathbf{7^{10}} = 7^{15}$	$\dfrac{15^{12}}{\mathbf{15^9}} = 15^3$	$(9^2)^{\mathbf{7}} = 9^{14}$
n°4	$3^5 \times 3^2 \times 3^6 = \mathbf{3^{5+2+6}} = \mathbf{3^{13}}$	$\dfrac{\mathbf{11^{10}}}{11^2} = 11^8$	$(2^{\mathbf{7}})^{-5} = 2^{-35}$

Exercice 7 : ☆☆☆

Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$A = (7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51})^2 = (7^{-24-26+51})^2 = (7^1)^2 = 7^{1\times2} = 7^2 = 49$

$B = (5^{-4} \times 5^5)^3 = (5^{-4+5})^3 = (5^1)^3 = 5^{1\times3} = 5^3 = 125$

$C = (2\times3)^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1} = 2^5 \times 3^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1} = 2^5 \times 2 \times 2^{-4} \times 3^5 \times 3^{-3} \times 3^{-1}$

$C = 2^{5+1-4} \times 3^{5-3-1} = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$

Exercice 8 : ☆☆☆

Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$D = \dfrac{2^5 \times 3^8}{3^5 \times 2^3} = \dfrac{2^5}{2^3} \times \dfrac{3^8}{3^5} = 2^{5-3} \times 3^{8-5} = 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$

$E = \dfrac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}} = \dfrac{5^{12}}{5^{10}} \times \dfrac{10^{-3}}{10^{-5}} \times \dfrac{3^8}{3^8} = 5^{12-10} \times 10^{-3-(-5)} \times 3^{8-8} = 5^2 \times 10^2 \times 3^0 = 25 \times 100 \times 1 = 2\ 500$

Exercice 9 : ☆

Écrire sous forme d'un nombre décimal :

1) $10^6 = 1\ 000\ 000$

2) $10^1 = 10$

3) $10^{-3} = 0{,}001$

4) $10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$

5) $10^{14} = 100\ 000\ 000\ 000\ 000$

6) $10^0 = 1$

7) $10^{-7} = 0{,}000\ 000\ 1$

8) $10^{-1} = 0{,}1$

Exercice 10 : ☆

Écrire sous la forme d'une puissance de 10 :

1) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\ 000\ 000 = 10^8$

2) $10 \times 100 \times 1\ 000 = 10 \times 10^2 \times 10^3 = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{1+2+3 \text{ fois}} = 10^6$

3) $\dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$

4) $\dfrac{1}{10^9} = 10^{-9}$

5) $0,000\ 000\ 01 = 10^{-8}$

6) $\dfrac{1}{1\ 000\ 000} = \dfrac{1}{10^6} = 10^{-6}$

Exercice 11 : ☆☆

Donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal :

1) $10^7 \times 10^4 = 10\ 000\ 000 \times 10\ 000 = 100\ 000\ 000\ 000$

2) $10^3 - 10^2 = 1\ 000 - 100 = 900$

3) $10^6 + 10^{-3} = 1\ 000\ 000 + 0,001 = 1\ 000\ 000,001$

4) $10^2 - 10^{-2} = 100 - 0,01 = 99,99$

5) $\dfrac{1}{10^2} = 10^{-2} = 0,01$

6) $\dfrac{1}{10^{-3}} = 10^{-(-3)} = 10^3 = 1\ 000$

7) $\dfrac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3} = 0,001$

Exercice 12 : ☆☆☆

Encadrer les nombres suivants entre deux puissances de 10 consécutives :

1) Longueur moyenne de l'intestin grêle : **6 m** : $10^0 < 6 < 10^1$

2) Altitude du Mont Everest : **8 848 m** : $10^3 < 8\ 848 < 10^4$

3) Altitude du Mont Olympus (sur Mars) : **20 000 m** : $10^4 < 20\ 000 < 10^5$

4) Longueur d'un spermatozoïde : **0,000 06 m** : $10^{-5} < 0,000\ 06 < 10^{-4}$

5) Rayon de l'atome de plomb : **0,000 000 000 18 m** : $10^{-10} < 0,000\ 000\ 000\ 18 < 10^{-9}$

6) Distance Terre-Lune : **385 000 000 m** : $10^8 < 385\ 000\ 000 < 10^9$

7) Diamètre d'un globule rouge : **0,000 007 m** : $10^{-6} < 0,000\ 007 < 10^{-5}$

☞ **Exercice 13 :** ☆

1) L'écriture $3,806 \times 10^{-12}$ est-elle une écriture scientifique ? Justifier.

Oui, c'est bien une écriture scientifique, car $3,806$ est bien un nombre avec un seul chiffre non nul devant la virgule, et -12 est bien un entier relatif, et c'est bien une puissance de 10.

2) a. Expliquer pourquoi $0,125 \times 10^7$ et $4,098 \div 10^6$ ne sont pas des écritures scientifiques.

☞ $0,125 \times 10^7$ n'est pas une écriture scientifique car $0,125$ n'est pas un nombre avec un seul chiffre **non nul** devant la virgule.

☞ $4,098 \div 10^6$ n'est pas une écriture scientifique car il faudrait **multiplier** $4,098$ par une puissance de 10 et non pas le diviser.

b. *(Bonus)* Écrire ces expressions en notation scientifique.

☞ $0,125 \times 10^7 = 1,25 \times 10^6$

☞ $4,098 \div 10^6 = 4,098 \times 10^{-6}$

☞ **Exercice 14 :** ☆

Donner l'écriture scientifique des longueurs suivantes :

1) Diamètre d'un globule rouge : 0,000 007 m $= 7 \times 10^{-6}$ m

2) Distance Terre-Lune : 385 000 km $= 3,85 \times 10^5$ km

3) Distance Terre-Soleil : 150×10^6 km $= 1,5 \times 10^8$ km

4) Distance moyenne Soleil-Pluton : 5 900 millions de km $= 5,9 \times 10^9$ km

5) Distance Soleil-Proxima (étoile la plus proche du Soleil) : 40 000 milliards de km $= 4 \times 10^{13}$ km

☞ **Exercice 15 :** ☆☆

Donner l'écriture scientifique des longueurs suivantes :

1) $53\ 160,02 \times 10^{14} = 5,316\ 002 \times 10^{18}$

2) $290\ 030\ 001,2 \times 10^7 = 2,900\ 300\ 012 \times 10^{15}$

3) $9\ 180\ 000 \times 10^{11} = 9,18 \times 10^{17}$

4) $6\ 910,10 \times 10^{-15} = 6,9101 \times 10^{-12}$

5) $0,000\ 074\ 7 \times 10^{13} = 7,47 \times 10^8$

6) $0,000\ 000\ 002\ 109 \times 10^{-8} = 2,109 \times 10^1$

7) $800\ 350 \times 10^{-6} = 8,003\ 5 \times 10^{-1}$

☞ Exercice 16 : ☆

Certains ordinateurs, appelés *supercalculateurs*, sont capables d'effectuer 10 000 milliards d'opérations en 1 seconde. Sous la forme d'une puissance de 10, donner un ordre de grandeur du nombre d'opérations que peuvent réaliser de tels ordinateurs pendant la durée du film *Avatar* (2 h 42 min) :

Le film *Avatar* dure 2 h 42 min, soit un total de $2 \times 3\ 600 + 42 \times 60 = 9\ 720 \approx 10\ 000 = 10^4$ secondes.

10 000 milliards d'opérations peut s'écrire sous la forme $10\ 000 \times 10^9 = 10^4 \times 10^9 = 10^{4+9} = 10^{13}$ opérations.
(En effet 1 milliard $= 10^9$)

Un *supercalculateur* peut donc effectuer environ $10^4 \times 10^{13} = 10^{4+13} = \mathbf{10^{17}}$ opérations pendant le film *Avatar*

☞ Exercice 17 : ☆☆

1) Le 1er janvier 2 016, vous gagnez 1 €. Votre salaire va doubler tous les jours. Combien gagnerez-vous le dernier jour de ce mois ?

Le 2 janvier, je gagnerai 2 $(= 2^1)$ €. Le 3 janvier, je gagnerai 4 $(= 2^2)$ €. Le 4 janvier, je gagnerai 8 $(= 2^3)$ €... Et ainsi de suite jusqu'au 31 janvier, où je gagnerai donc $2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824$ €.

2) Même question, mais en commençant avec 1 € le 1er février 2 016. Comparer ensuite les résultats des 2 questions.

Le mois de février 2 016 comportait 29 jours (année bisextile !). Le dernier jour, je gagnerai donc $2^{28} = 268\ 435\ 456$ €.

On constate donc que le simple fait de rajouter 2 jours permet de gagner $1\ 073\ 741\ 824 - 268\ 435\ 456 = 805\ 306\ 368$ €. Ce qui est logique car on a doublé par 2 fois le salaire gagné, on l'a donc quadruplé.

☞ Exercice 18 : ☆☆☆

Combien d'arrière-arrière-arrière-grand-mères avez-vous ?

Nous avons normalement 2 grand-mères (1 par parent). Il faut multiplier par 2 à chaque fois que l'on remonte d'une génération. Nous avons donc $2^4 = 16$ arrière-arrière-arrière-grand-mères.

☞ **Exercice 19 :** ☆☆☆

D'après DNB Liban 2009 :
On donne l'expression numérique suivante :

$$A = 2 \times 10^2 + 10^1 + 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

1) Quel est le chiffre des unités de ce nombre ?

Le chiffre des unités sera 0 car il n'y a pas de puissance de 10 nulle (et seul $10^0 = 1$).

2) Donner l'écriture décimale de ce nombre :

$A = 200 + 10 + 0,1 + 0,02 = 210,12$

3) Donner l'écriture scientifique de ce nombre :

$A = 2,101\ 2 \times 10^2$

4) Écrire A sous la forme du produit d'un entier par une puissance de 10 :

$A = 21\ 012 \times 10^{-2}$

5) Écrire ce nombre sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction irréductible inférieure à 1 :

$A = 210 + \frac{12}{100} = 210 + \frac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{4} \times 25} = 210 + \frac{3}{25}$

☞ **Exercice 20 :** ☆☆☆

D'après DNB Amérique du Nord 2012 :
Elsa obseve au microscope, à midi, une cellule de bambou. Au bout d'une heure, la cellule s'est divisée en deux. On a alors deux cellules. Au bout de deux heures, ces cellules se sont divisées en deux (on a donc 4 cellules). Elsa note toutes les heures les résultats de ses observations.
À quelle heure notera-t-elle, pour la première fois, plus de 200 cellules ?

Le nombre de cellules est multiplié par 2 à chaque heure. À la fin de l'heure 1, il est de $2 = 2^1$, à la fin de l'heure 2 il est de $4 = 2^2$, et ainsi de suite. On cherche donc la première puissance de 2 qui dépasse 200.

Or $2^7 = 128$ et $2^8 = 256$. C'est donc à la fin de la 8ème heure qu'Elsa notera pour la première fois plus de 200 cellules.

Mises au Travail