Séquence 11 : Fonctions affines, linéaires et constantes

✐ ✎ ✐ **OBJECTIFS :** ✎ ✐ ✎

À la fin de cette Séquence 11, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
La définition et les propriétés (dont représentation graphique) d'une fonction linéaire.	Cours parties A)1. et B)1.
La définition et les propriétés (dont représentation graphique) d'une fonction affine.	Cours parties A)2. et B)2.
La définition et les propriétés (dont représentation graphique) d'une fonction constante.	Cours parties A)3. et B)3.

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner :		
	☆	☆☆	☆☆☆
Reconnaître la *nature* d'une fonction f par l'expression de $f(x)$.	n°1	n°2	n°3
Reconnaître la *nature* d'une fonction f par le graphe $\mathcal{C}_f$.	n°4		
Représenter graphiquement une fonction.	n°5, 6	n°7	
Lire graphiquement les coefficients d'une fonction affine.	n°8	n°9, 10	
Calculer l'image et l'antécédent d'un nombre par une fonction.		n°11, 12	
Résoudre des problèmes impliquant des fonctions.		n°13	n°14, 15

A) Définitions

1. Fonctions affines

Définition 1 : Fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction qui à tout nombre x associe le nombre $f(x) = ax + b$.

a et b sont des nombres relatifs donnés appelés les **coefficients** de la fonction f.

Exemple(s) :

$f(x) = 3x + 6$ — $\mathbf{a = 3}$ et $\mathbf{b = 6}$

$g : x \mapsto -5x + 9$ — $\mathbf{a = -5}$ et $\mathbf{b = 9}$

$h : x \mapsto h(x) = 2x - 3,5$ — $\mathbf{a = 2}$ et $\mathbf{b = -3,5}$

2. Fonctions linéaires

Définition 2 : Fonction linéaire

Une **fonction linéaire** est une fonction qui à tout nombre x associe le nombre $f(x) = ax$.

a est un nombre relatif non nul donné appelé le **coefficient** de la fonction f.

Une fonction linéaire est **une fonction affine avec $\mathbf{b = 0}$**.

Exemple(s) :

$f(x) = 5x$ — $\mathbf{a = 5}$

$g : x \mapsto -\frac{1}{2}x$ — $\mathbf{a = -\frac{1}{2}}$

$h : x \mapsto h(x) = 9,2x$ — $\mathbf{a = 9,2}$

3. Fonctions constantes

Définition 3 : Fonction constante

Une fonction constante est une fonction qui à tout nombre x associe le nombre $f(x) = b$.

b est un nombre relatif.

L'image d'une fonction constante est constante : que quel que soit l'antécédent x, le résultat $f(x)$ est **toujours le même**.

Exemple(s) :

$f(x) = -3$	$g : x \mapsto \frac{7}{3}$	$h : x \mapsto h(x) = 0$
$\mathbf{b} = -3$	$\mathbf{b} = \frac{7}{3}$	$\mathbf{b} = 0$

4. Résumé

Fonction affine : $f(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$

$\mathbf{b} = 0$ → Fonction linéaire : $f(x) = \mathbf{a}x$

$\mathbf{a} = 0$ → Fonction constante : $f(x) = \mathbf{b}$

B) Représentations graphiques

1. Fonctions affines

Propriété 1 : Représentation graphique d'une fonction affine

Dans un repère, une **fonction affine** est représentée par une **droite**. Les coefficients de la fonction affine $f(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ influent sur la droite :

- **a** est le **coefficient directeur** de la droite : il donne son **inclinaison**.
- **b** est l' **ordonnée à l'origine** de la droite : il donne **l'endroit où la droite coupe l'axe des ordonnées**.

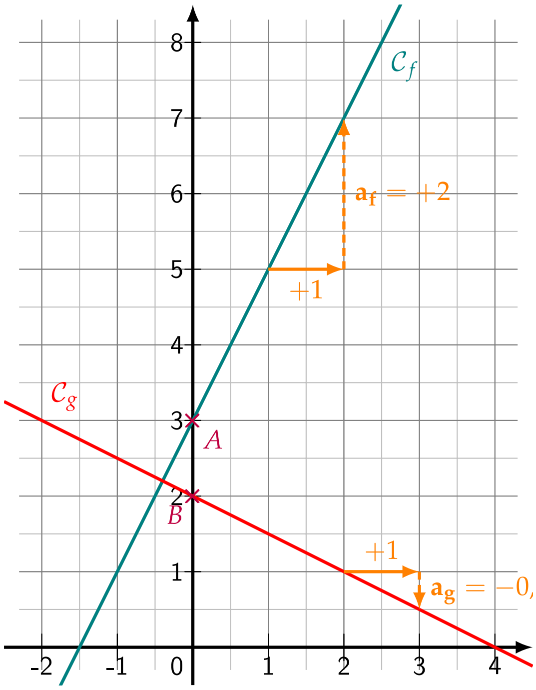
Pour une fonction $f(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$:

- **a** signifie que si l'on se déplace de 1 unité vers la droite, alors on « monte » de **a** unités (ou on descend si **a** est négatif).
- **b** signifie que la droite coupe l'axe des ordonnées à la « hauteur » **b**.

Exemple(s) :

Dans le repère de la page suivante, on veut tracer les représentations graphiques des fonctions :

$$f : x \mapsto \mathbf{2}x + \mathbf{3} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \mathbf{-0,5}x + \mathbf{2}$$



$\boxed{f(x) = 2x + 3}$

☞ Le coefficient directeur est **2** donc :

Quand on avance de 1, on **monte** de **2**.

☞ L'ordonnée à l'origine est **3** donc :

La droite passe par le point $A(0; 3)$

$\boxed{g(x) = -0,5x + 2}$

☞ Le coefficient directeur est $-\mathbf{0,5}$ donc :

Quand on avance de 1, on **descend** de **0,5**.

☞ L'ordonnée à l'origine est **2** donc :

La droite passe par le point $B(0; 2)$

2. Fonctions linéaires

Propriété 2 : Représentation graphique d'une fonction linéaire

Dans un repère, une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine.

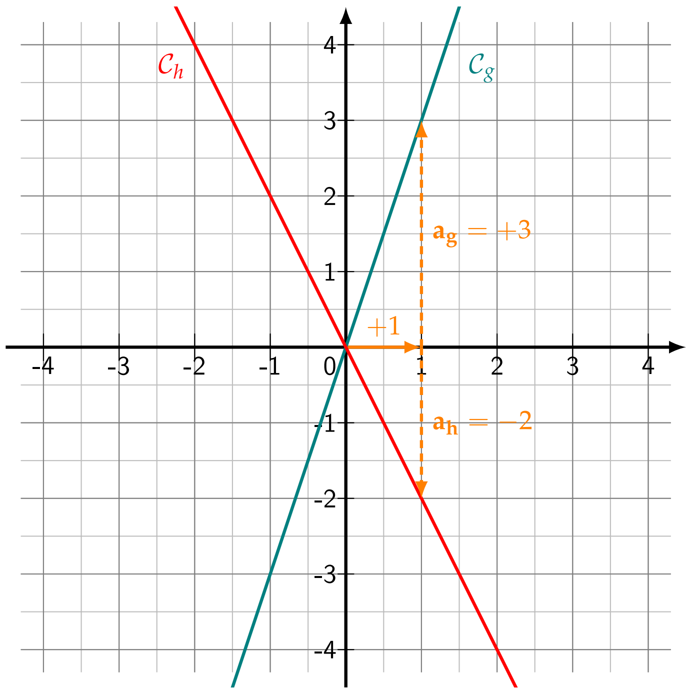
Le coefficient **a** est le **coefficient directeur** qui donne l'inclinaison de la droite.

☞ **Exemple(s) :**

Dans le repère ci-contre, tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes :

$$h : x \mapsto 3x$$

$$g : x \mapsto -2x$$



3. Fonctions constante

Propriété 3 : Représentation graphique d'une fonction constante

Dans un repère, une fonction constante est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses, et coupant l'axe des ordonnées à la « hauteur » **b** (l'ordonnée à l'origine).

☞ **Exemple(s) :**

La fontion $f : x \mapsto -3,42$ aura pour représentation graphique une droite horizontale passant par le point $(\mathbf{0}; -\mathbf{3,42})$.

4. Résumé

Dans le repère ci-contre, trace les représentations graphiques des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$$

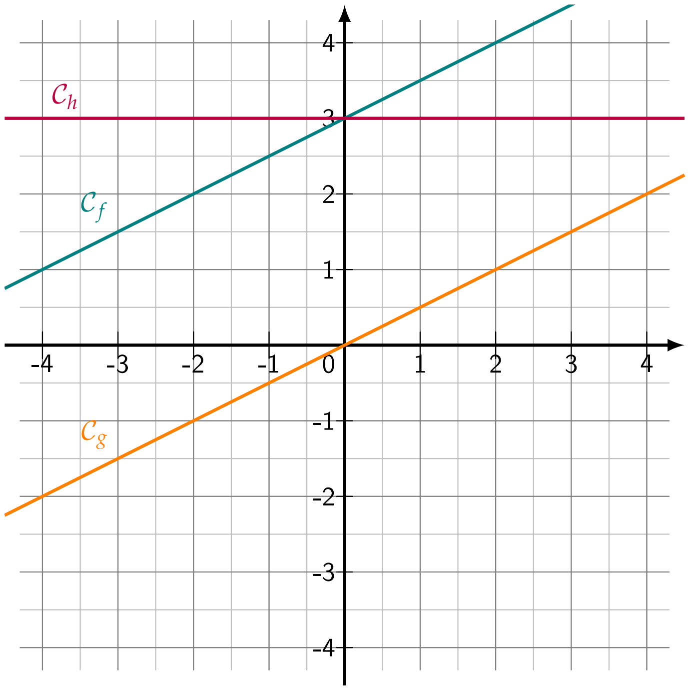
f est une **fonction affine** de **coefficient directeur** $\frac{1}{2}$ et d' **ordonnée à l'origine** 3.

$$g : x \mapsto \frac{1}{2}x$$

f est une **fonction linéaire** de **coefficient directeur** $\frac{1}{2}$.

$$h : x \mapsto 3$$

f est une **fonction constante** d' **ordonnée à l'origine** 3.



C) Images et antécédents

Méthode 1 : Trouver l'image d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Pour calculer l'image d'un nombre par n'importe quelle fonction (affine, linéaire ou autre), il suffit de remplacer x par le nombre en question dans l'expression de la fonction.

Exemple(s) :

Calculer les **images** de 2 et de -5 par les fonctions suivantes :

$\boxed{f : x \mapsto -3x}$

$$f(2) = -3 \times 2 = \mathbf{-6}$$
$$f(-5) = -3 \times (-5) = \mathbf{15}$$

$\boxed{g : x \mapsto 4x - 5}$

$$g(2) = 4 \times 2 - 5 = 8 - 5 = \mathbf{3}$$
$$g(-5) = 4 \times (-5) - 5 = -20 - 5 = \mathbf{-25}$$

Méthode 2 : Trouver l'antécédent d'un nombre par une fonction affine ou linéaire

Pour trouver l'antécédent du nombre k par la fonction f, il faut résoudre l'équation $f(x) = k$.

Exemple(s) :

Calculer le(s) **antécédent(s)** de 3 par la fonction $f : x \mapsto 2x - 5$:

Il faut donc résoudre l'équation suivante :

$$f(x) = 3$$
$$2x - 5 = 3$$
$$2x - 5 + 5 = 3 + 5$$
$$2x = 8$$
$$2x \div 2 = 8 \div 2$$
$$\boxed{\mathbf{x = 4}}$$

3 a donc pour unique antécédent 4 par la fonction f.

Exercices

☞ Exercice 1 : ☆

Complète le tableau en identifiant les coefficients a et b des fonctions affines suivantes (en modifiant son expression si besoin) :

$f(x) = ax + b$	a	b
$f(x) = 5x + 12$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{12}$
$g(x) = x - 4 = \mathbf{1x - 4}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-4}$
$h(x) = 2(3x + 0,7) - 5 = \mathbf{6x + 1,4 - 5 = 6x - 3,6}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{-3,6}$
$j(x) = \dfrac{5 - 6x}{3} = \mathbf{-2x + \dfrac{5}{3}}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{\dfrac{5}{3}}$
$k(x) = 5 = \mathbf{0x + 5}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{5}$

☞ Exercice 2 : ☆☆

Pour chaque fonction ci-dessous, coche si elle est affine, linéaire, constante ou aucun des 3 (en modifiant son expression si besoin) :

Fonction	Affine ?	Linéaire ?	Constante ?	Autre ?
$f(x) = 2 - x \mathbf{-1x + 2}$	✔			
$g(x) = 2$			✔	
$h(x) = 3x^2$				✔
$j(x) = 3(x - 2) + 6 = \mathbf{3x - 6 + 6 = 3x}$		✔		
$f(x) = 6 - 3x = \mathbf{-3x + 6}$	✔			
$g(x) = 4 + 7 = \mathbf{11}$			✔	
$h(x) = 7(x + 3)(x - 2) = \mathbf{7x^2 + 7x - 42}$				✔
$j(x) = 3,96x$		✔		

☞ Exercice 3 : ☆☆☆

1) Traduis chacun des programmes de calcul suivants par une fonction :

☞ Choisir un nombre ☞ Ajouter $3,5$ ☞ Mutiplier par le nombre initial	☞ Choisir un nombre ☞ Élever au carré ☞ Soustraire 5	☞ Choisir un nombre ☞ Ajouter 2 ☞ Multiplier par -5	☞ Choisir un nombre ☞ Diviser par 2 ☞ Ajouter $6,7$
$f(x) = \mathbf{x^2 + 3,5x}$	$g(x) = \mathbf{x^2 - 5}$	$h(x) = \mathbf{-5x - 10}$	$i(x) = \mathbf{\dfrac{x}{2} + 6,7}$

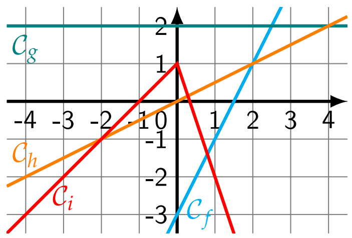
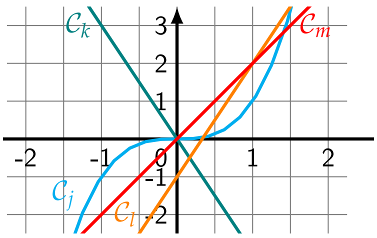
2) Lesquelles de ces fonctions sont affines ? Justifier.

$h(x) = ab + b$ avec $a = -5$ et $b = -10$ donc h est affine.

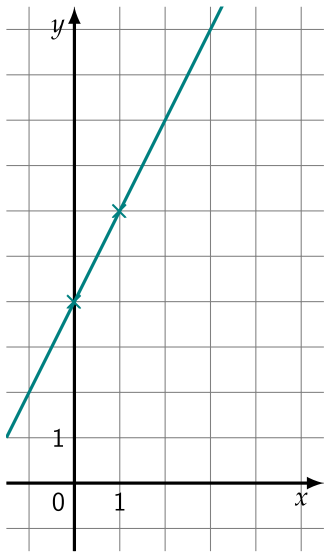
$i(x) = ab + b$ avec $a = 0,5$ et $b = 6,7$ donc i est affine.

Exercice 4 : ☆

Pour chaque fonction ci-dessous, coche si elle est affine, linéaire, constante ou aucun des 3 :

Fonction		Affine ?	Linéaire ?	Constante ?	Autre ?
	f	✔			
	g			✔	
	h		✔		
	i				✔
	j				✔
	k		✔		
	l	✔			
	m		✔		

Exercice 5 : ☆



f est la fonction affine définie par $f : x \mapsto 2x + 4$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(1)$:

$f(0) = 2 \times 0 + 4 = \mathbf{4} \Rightarrow (0;4)$

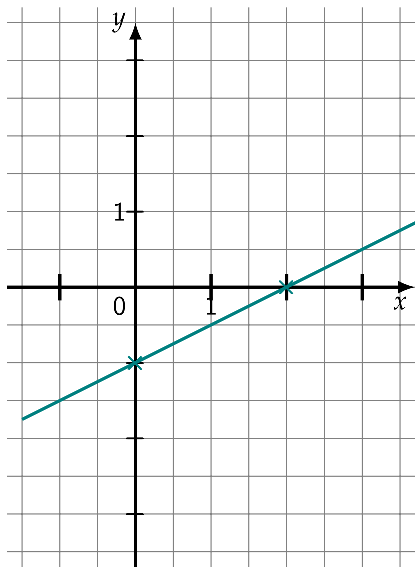
$f(1) = 2 \times 1 + 4 = 2 + 4 = \mathbf{6} \Rightarrow (1;6)$

2) Dans le repère ci-contre, placer 2 points de la représentation graphique de f en utilisant les résultats de la question précédente.

3) Tracer la représentation graphique de f et justifier :

f est une fonction affine, sa représentation graphique est donc une droite. Il suffit donc de connaître 2 points de la droite.

Exercice 6 : ☆



g est la fonction affine définie par $g : x \mapsto 0,5x - 1$.

1) Calculer $g(0)$ et $g(2)$:

$g(0) = 0,5 \times 0 - 1 = \mathbf{-1} \Rightarrow (0;-1)$

$g(2) = 0,5 \times 2 - 1 = 1 - 1 = \mathbf{0} \Rightarrow (2;0)$

2) Dans le repère ci-contre, placer 2 points de la représentation graphique de g en utilisant les résultats de la question précédente.

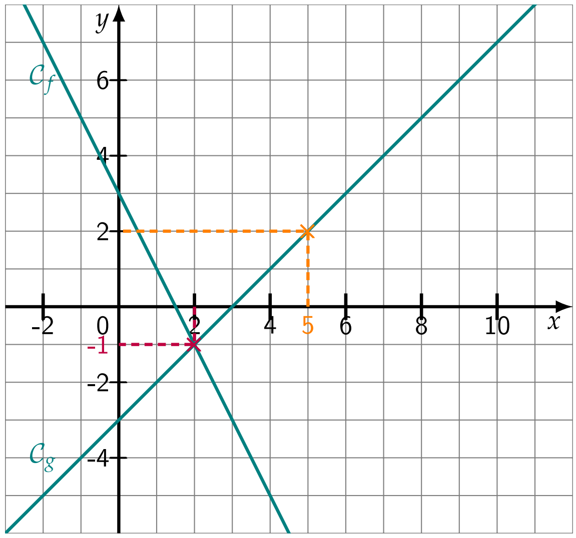
3) Tracer la représentation graphique de g et justifier :

g est une fonction affine, sa représentation graphique est donc une droite. Il suffit donc de connaître 2 points de la droite.

☞ Exercice 7 : ☆☆

1) Tracer dans le repère ci-contre les représentations graphiques des fonctions :

$$f : x \mapsto -2x + 3 \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto x - 3$$



2) Déterminer graphiquement la valeur de x qui a la même image par les deux fonctions. Quelle est cette image commune ?

Les deux droites se croisent au point $(2, -1)$. Ces deux fonctions ont donc la même image pour $x = 2$. Cette image est -1.

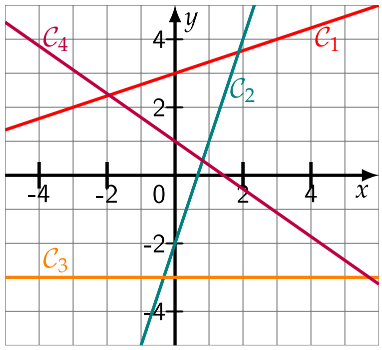
3) Déterminer graphiquement l'antécédent de 2 par la fonction g.

En partant de 2 sur l'axe des ordonnées, on lit 5 comme abscisse.

Donc l'antécédent de 2 par g est 5.

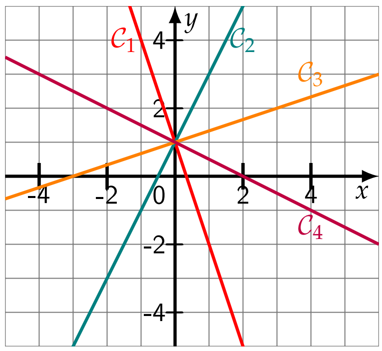
☞ Exercice 8 : ☆

1) Associer chacune des fonctions suivantes avec sa représentation graphique à l'aide de l'ordonnée à l'origine :



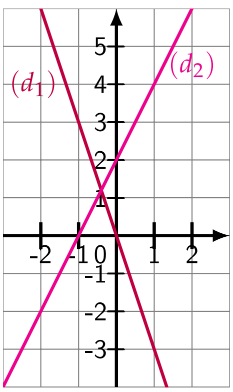
- ☞ $f : x \mapsto -0,7x + 1 : \mathcal{C}_4$
- ☞ $g : x \mapsto 3x - 2 : \mathcal{C}_2$
- ☞ $h : x \mapsto \dfrac{1}{3}x + 3 : \mathcal{C}_1$
- ☞ $k : x \mapsto -3 : \mathcal{C}_3$

2) Associer chacune des fonctions suivantes avec sa représentation graphique à l'aide du coefficient directeur :



- ☞ $f : x \mapsto 2x + 1 : \mathcal{C}_2$
- ☞ $g : x \mapsto -3x + 1 : \mathcal{C}_1$
- ☞ $h : x \mapsto \dfrac{1}{3}x + 1 : \mathcal{C}_3$
- ☞ $k : x \mapsto -0.5x + 1 : \mathcal{C}_4$

☞ Exercice 9 : ☆☆



(d_1) et (d_2) sont des droites. Trouver, **en justifiant**, l'expression de la fonction représentée...

1) ...par la droite (d_1) :

(d_1) est une droite **passant par l'origine**, elle représente donc une **fonction linéaire** de la forme $f(x) = ax$. Il suffit de chercher le **coefficient directeur** :

$$a = -3$$

$$\Longrightarrow \boxed{f : x \mapsto -3x}$$

2) ...par la droite (d_2) :

(d_2) est une droite, elle représente donc une **fonction affine** de la forme $g(x) = ax + b$.

Coefficient directeur :

$$a = +2$$

Ordonnée à l'origine :

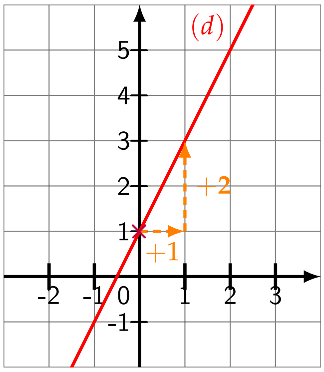
$$b = +2$$

$$\Longrightarrow \boxed{g : x \mapsto 2x + 2}$$

Exercice 10 : ☆☆

(d) est la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

Déterminer pour chaque cas le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b, et en déduire l'expression de la fonction f :



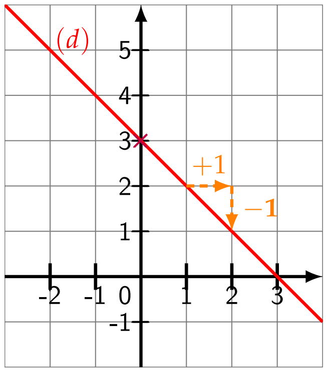
Coefficient directeur :

$a = +2$

Ordonnée à l'origine :

$b = +1$

$\Longrightarrow \boxed{f : x \mapsto 2x + 1}$



Coefficient directeur :

$a = -1$

Ordonnée à l'origine :

$b = +3$

$\Longrightarrow \boxed{f : x \mapsto -x + 3}$

Exercice 11 : ☆☆

1) f est la fonction définie par $f : x \mapsto 2x - 1$. Déterminer les antécédents par f...

a. ...de 5 :

$$2x - 1 = 5$$
$$2x - 1 + 1 = 5 + 1$$
$$2x = 6$$
$$2x \div 2 = 6 \div 2$$
$$\boxed{x = 3}$$

b. ...de 10 :

$$2x - 1 = 10$$
$$2x - 1 + 1 = 10 + 1$$
$$2x = 11$$
$$2x \div 2 = 11 \div 2$$
$$\boxed{x = 5,5}$$

c. ...de -4 :

$$2x - 1 = -4$$
$$2x - 1 + 1 = -4 + 1$$
$$2x = -3$$
$$2x \div 2 = -3 \div 2$$
$$\boxed{x = -1,5}$$

2) g est la fonction définie par $g : x \mapsto -x + 7$. Déterminer les antécédents par g...

a. ...de 2 :

$$-x + 7 = 2$$
$$-x + 7 - 7 = 2 - 7$$
$$-x = -5$$
$$-x \times (-1) = -5 \times (-1)$$
$$\boxed{x = 5}$$

b. ...de 6 :

$$-x + 7 = 6$$
$$-x + 7 - 7 = 6 - 7$$
$$-x = -1$$
$$-x \times (-1) = -1 \times (-1)$$
$$\boxed{x = 1}$$

c. ...de -5 :

$$-x + 7 = -5$$
$$-x + 7 - 7 = -5 - 7$$
$$-x = -12$$
$$-x \times (-1) = -12 \times (-1)$$
$$\boxed{x = 12}$$

Exercice 12 : ☆☆

1) f est la fonction définie par $f : x \mapsto -7x-1$. Déterminer les antécédents par f...

a. ...de 5 :

$$-7x-1=5$$
$$-7x-1+1=5+1$$
$$-7x=6$$
$$-7x\div(-7)=6\div(-7)$$
$$\boxed{x=-\frac{7}{6}}$$

b. ...de 0 :

$$-7x-1=0$$
$$-7x-1+1=0+1$$
$$-7x=1$$
$$-7x\div(-7)=1\div(-7)$$
$$\boxed{x=-\frac{1}{6}}$$

c. ...de $-\frac{1}{3}$:

$$-7x-1=-\frac{1}{3}$$
$$-7x-1+1=-\frac{1}{3}+1$$
$$-7x=\frac{2}{3}$$
$$-7x\div(-7)=\frac{2}{3}\div(-7)$$
$$\boxed{x=-\frac{2}{21}}$$

2) g est la fonction définie par $g : x \mapsto -1,6x+5,7$. Déterminer les antécédents par g...

a. ...de 2 :

$$-1,6x+5,7=2$$
$$-1,6x+5,7-5,7=2-5,7$$
$$-1,6x=-3,7$$
$$-1,6x\div(-1,6)=-3,7\div(-1,6)$$
$$\boxed{x=2,3125}$$

b. ...de -11 :

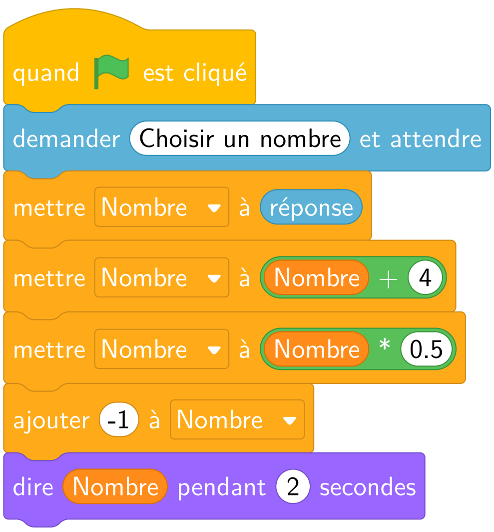
$$-1,6x+5,7=-11$$
$$-1,6x+5,7-5,7=-11-5,7$$
$$-1,6x=-16,7$$
$$-1,6x\div(-1,6)=-16,7\div(-1,6)$$
$$\boxed{x=10,4375}$$

c. ...de 4 :

$$-1,6x+5,7=4$$
$$-1,6x+5,7-5,7=4-5,7$$
$$-1,6x=-1,7$$
$$-1,6x\div(-1,6)=-1,7\div(-1,6)$$
$$\boxed{x=1,0625}$$

Exercice 13 : ☆☆

On donne le script suivant :



1) Qu'annonce le lutin si l'utilisateur saisit -5 ?

$(-5+4)\times 0,5-1=-0,5-1=\mathbf{-1,5}$

Le lutin annonce $-1,5$.

2) On appelle x le nombre choisi et f la fonction qui, à ce nombre, fait correspondre le résultat annoncé par le lutin. Exprimer $f(x)$ en fonction de x et donner la nature de la fonction f.

$f(x)=(x+4)\times 0,5-1=0,5\times x+0,5\times 4-1$
$\mathbf{f(x)=0,5x+1}$

f est une **fonction affine**.

3) Arnaud a obtenu 17. Quel nombre avait-il choisi au départ ?

On cherche x tel que $f(x)=17$.

$0,5x+1=17 \quad \Longrightarrow \quad 0,5x=17-1=16$
$\Longrightarrow \quad x=16\div 0,5=\mathbf{32}$

Arnaud a choisi le nombre 32.

4) Quel nombre faudrait-il écrire dans l'avant-dernière ligne du script à la place de -1 pour que la fonction f soit linéaire ? Justifier.

Il faut écrire -2 à la place de -1.
Ainsi, on aurait $f(x)=0,5x+2-2=\mathbf{0,5x}$.

☞ Exercice 14 : ☆☆☆

f est une fonction affine dont la représentation graphique (d) passe par les points $A(3;2)$ et $B(4;5)$.

1) Déterminer par le calcul le coefficient directeur a de la droite (d).

On remarque qu'il y a une différence de 1 entre les abscisses des points A et B, donc le coefficient directeur de la droite s'obtient directement en prenant **la différence des ordonnées** des points A et B :

$$a = 5 - 2 = \mathbf{3}$$

2) Déterminer par le calcul l'ordonnée à l'origine b de la droite (d), puis exprimer $f(x)$ en fonction de x.

On sait que f est une fonction affine. Son expression est donc de la forme $f(x) = 3x + b$.

On sait également que la droite passe par le point $A(3;2)$, donc on a forcément $f(3) = 2$ (*on aurait tout aussi bien pu utiliser le point* B), d'où :

$$3 \times 3 + b = 2 \quad \Longrightarrow \quad 9 + b = 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{b = 2 - 9 = -1}$$

On a donc $\mathbf{f(x) = 3x - 7}$.

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des abscisses, puis avec l'axe des ordonnées.

Intersection avec l'axe des abscisses :

On cherche x tel que $f(x) = 0$, soit $3x - 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x = 7 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \frac{7}{2}}$.

La droite (d) coupe l'axe des abscisses au point $M\left(\frac{7}{3};0\right)$.

Intersection avec l'axe des ordonnées :

On cherche $f(0) = 3 \times 0 - 7 = 0 - 7 = -7$.

La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point $N(0;-7)$.

☞ Exercice 15 : ☆☆☆

On ressent davantage le froid quand le vent souffle. On peut alors calculer une « température ressentie » grâce à la formule suivante :

$$T(x) = 13,12 + 0,621\ 5x + (0,396\ 5x - 11,37) \times k$$

où x est la température réelle en °C et k est un coefficient qui dépend de la vitesse du vent.

1) Quand le vent est de 50 km/h, on a $k = 1,87$. Démontrer que la fonction T est affine.

$T(x) = 13,12 + 0,621\ 5x + (0,396\ 5x - 11,37) \times 1,87 = 13,12 + 0,621\ 5x + 0,741\ 455x - 21,261\ 9$

$T(x) = 1,362\ 955x - 8,141\ 9$

La fonction T est bien affine.

2) Quelle est la température réelle lorsque le vent souffle à 50 km/h et que la température ressentie est de 0°C ?

On cherche x tel que $T(x) = 0$:

$$1,362\ 955x - 8,141\ 9 = 0$$

$$1,362\ 955x - 8,141\ 9 + 8,141\ 9 = 0 + 8,141\ 9$$

$$1,362\ 955x = 8,141\ 9$$

$$1,362\ 955x \div 1,362\ 955 = 8,141\ 9 \div 1,362\ 955$$

$$\boxed{x \approx 6}$$

La température réelle est d'environ 6°C.

Mises au Travail