Séquence 12 : Statistiques (2) - Médiane

✐ ✎ ✐ **OBJECTIFS** : ✎ ✐ ✎

À la fin de cette Séquence 12, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Les définitions d'**étendue** et de **médiane**.	Cours partie A
Les méthodes de calcul de la médiane dans les différents cas.	Cours partie B (1 et 2)
Les formules de calcul dans un tableur.	Cours partie B (3)

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Calculer l'étendue d'une série statistique.	n°1		
Trouver la médiane d'une série statistique dans les cas « simples ».	n°2	n°3	n°4
Trouver la médiane d'une série statistique dans un tableau d'effectifs.	n°5, 6	n°7, 8	n°9
Comparer la moyenne et la médiane d'une série statistique.		n°10, 11	
Utiliser un tableur pour calculer la médiane et la moyenne d'une série statistique.		n°12	
Exercices type brevet.		n°12	

Dans ce cours, nous allons travailler sur les **notes obtenues par les élèves de 3ème au DNB Blanc n°1 en mathématiques l'année dernière** (arrondies à l'entier supérieur). Nous travaillerons dans un premier temps sur de petits extraits de ces notes, puis dans un second temps sur l'ensemble des notes de la cohorte.

A) Caractéristiques de position et de dispersion d'une série statistique

☞ **Exemple(s) :**

Dans cette partie, nous allons utiliser les notes de 9 élèves sélectionnés aléatoirement dans la cohorte de 3ème :

✳ 47 ✳ 18 ✳ 12 ✳ 19 ✳ 52 ✳ 27 ✳ 35 ✳ 21 ✳ 35 ✳

On appelle « caractéristiques de position » les indicateurs tels que la **moyenne** ou la **médiane**, qui donnent une information sur la représentativité générale de la série statistique étudiée. On appelle « caractéristiques de dispersion » les indicateurs tels que l'**étendue** ou l'**écart-type** qui donnent des informations sur la façon dont les données sont « étalées » ou « regroupées ».

❧ **Définition 1 : Étendue**

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de cette série.

☞ **Exemple(s) :**

Quelle est l'étendue de la série statistique ci-dessus ?

Minimum $= 12$
Maximum $= 52$

L'étendue est donc de $52 - 12 =$ **40.**

❧ **Définition 2 : Médiane**

La médiane d'une série statistique est la valeur qui sépare cette série en 2 ensembles de **même effectif**.

☞ **Exemple(s) :**

Quelle est la médiane de la série statistique ci-dessus ?

Classons les notes dans l'ordre croissant :

$$\underbrace{12 \leqslant 18 \leqslant 19 \leqslant 21}_{\text{4 valeurs}} \leqslant 27 \leqslant \underbrace{35 \leqslant 35 \leqslant 47 \leqslant 52}_{\text{4 valeurs}}$$

La médiane est donc de 27.

B) Calculer la médiane d'une série statistique

1. Cas « simples »

On parlera de cas « simple » lorsqu'il est possible de lister toutes les valeurs de la série. Dans ce cas, la première étape sera toujours de **trier les valeurs par ordre croissant**.

a. Si la série a un effectif IMPAIR

Propriété 1 : Effectif IMPAIR

Lorsque la série est d'**effectif IMPAIR $\mathbf{n}$**, sa médiane se trouve à la position $\boxed{\mathbf{\dfrac{n+1}{2}}}$.

Exemple(s) :

Soit la série suivante :

$$\underset{n°1}{4,2} \leqslant \underset{n°2}{7} \leqslant \underset{n°3}{8} \leqslant \underset{n°4}{9} \leqslant \underset{n°5}{14,75}$$

Quelle est sa médiane ?

Cette série est d'**effectif 5 impair**. Sa médiane se trouve donc à la $\dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = \mathbf{3}^{\text{ème}}$ position $\Longrightarrow$ $\boxed{\textbf{médiane} = \mathbf{8}}$.

Exemple(s) :

Dans cette partie, nous allons utiliser les notes des élèves de 3e4 :

✳ 9 ✳ 19 ✳ 52 ✳ 6 ✳ 35 ✳ 7 ✳ 12 ✳ 8 ✳ 47 ✳ 22 ✳ 7 ✳ 47 ✳
✳ 7 ✳ 18 ✳ 23 ✳ 39 ✳ 6 ✳ 31 ✳ 8 ✳ 15 ✳ 74 ✳ 16 ✳ 12 ✳

1) Ranger les notes par ordre croissant :

$$6 \leqslant 6 \leqslant 7 \leqslant 7 \leqslant 7 \leqslant 8 \leqslant 8 \leqslant 9 \leqslant 12 \leqslant 12 \leqslant 15 \leqslant 16 \leqslant 18 \leqslant 19 \leqslant 22 \leqslant 23 \leqslant 31 \leqslant 35 \leqslant 39 \leqslant 47 \leqslant 47 \leqslant 52 \leqslant 74$$

2) Quel est l'effectif de cette série statistique ?

Il y a **23 notes (impair)** dans cette série.

3) En déduire la position de la médiane de cette série statistique :

$$\text{Position de la médiane} = \frac{\mathbf{23}+1}{2} = \frac{24}{2} = \mathbf{12}^{\text{ème}} \textbf{ place}$$

4) En déduire la médiane de cette série statistique :

Médiane $=$ **16**

5) Calculer la moyenne de cette série statistique :

$$\begin{aligned}\text{Moyenne} &= \frac{6+6+7+7+7+8+8+9+12+12+15+16+18+19+22+23+31+35+39+47+47+52+74}{23} \\ &= \frac{520}{23} \approx \mathbf{22,6}\end{aligned}$$

6) Que remarques-tu ? Comment peut-on l'expliquer ?

On remarque que la **moyenne (22,6)** est bien plus haute que la **médiane (16)**. Cela s'explique par les quelques très bonnes notes (52 et 74 en particulier) qui « tirent la moyenne vers le haut », alors que **la médiane n'est pas influencée par les valeurs extrêmes**.

b. Si la série a un effectif PAIR

Dans le cas où l'effectif est pair, il n'y a pas d'élément « au centre » de la série. Il faut donc faire **la moyenne des 2 éléments centraux** :

> **Propriété 2 : Effectif PAIR**
>
> Lorsque la série est d'**effectif PAIR $\mathbf{n}$**, sa médiane est donnée par la **moyenne** des éléments situés aux positions $\boxed{\dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}}$ **et le suivant**.

Exemple(s) :

Soit la série suivante :

$$\underset{n°1}{4,16} \leqslant \underset{n°2}{4,2} \leqslant \underset{n°3}{7} \leqslant \underset{n°4}{8} \leqslant \underset{n°5}{9} \leqslant \underset{n°6}{14,75}$$

Quelle est sa médiane ?

Cette série est d'**effectif 6 pair**. Sa médiane est donc la moyenne des éléments situés à la $\dfrac{6}{2} = \mathbf{3}^{\text{ème}}$ et $\mathbf{4}^{\text{ème}}$ positions :

$$\Longrightarrow \boxed{\textbf{médiane} = \frac{\mathbf{7+8}}{\mathbf{2}} = \mathbf{7,5}}$$

Exemple(s) :

Dans cette partie, nous allons utiliser les notes des élèves de 3e5 :

✳ 47 ✳ 54 ✳ 49 ✳ 29 ✳ 19 ✳ 19 ✳ 64 ✳ 7 ✳ 6 ✳
✳ 28 ✳ 3 ✳ 10 ✳ 35 ✳ 17 ✳ 31 ✳ 22 ✳ 11 ✳ 12 ✳
✳ 16 ✳ 11 ✳ 11 ✳ 12 ✳ 28 ✳ 10 ✳ 1 ✳ 11 ✳

1) Ranger les notes par ordre croissant :

$$1 \leqslant 3 \leqslant 6 \leqslant 7 \leqslant 10 \leqslant 10 \leqslant 11 \leqslant 11 \leqslant 11 \leqslant 11 \leqslant 12 \leqslant 12 \leqslant 16 \leqslant 17 \leqslant 19 \leqslant 19 \leqslant 22 \leqslant 28 \leqslant 28 \leqslant 29 \leqslant 31$$
$$\leqslant 35 \leqslant 47 \leqslant 49 \leqslant 54 \leqslant 64$$

2) Quel est l'effectif de cette série statistique ?

Il y a **26 notes (pair)** dans cette série.

3) En déduire la position de la médiane de cette série statistique :

$$\text{Position de la médiane (entre)} = \frac{\mathbf{26}}{2} = \mathbf{13}^{\text{ème}} \text{ et } \mathbf{14}^{\text{ème}} \textbf{ places}$$

4) En déduire la médiane de cette série statistique :

$$\text{Médiane} = \frac{16+17}{2} = \mathbf{16,5}$$

5) Calculer la moyenne de cette série statistique :

$$\text{Moyenne} = \frac{1+3+6+7+\cdots+31+35+47+49+54+64}{26} = \frac{563}{26} \approx \mathbf{21,7}$$

6) Que remarques-tu ? Comment peut-on l'expliquer ?

On remarque que la **moyenne (21,7)** est bien plus haute que la **médiane (16,5)**. Cela s'explique par les quelques très bonnes notes (54 et 64 en particulier) qui « tirent la moyenne vers le haut », alors que **la médiane n'est pas influencée par les valeurs extrêmes**.

2. Dans un tableau d'effectifs

Lorsqu'il y a trop de valeurs dans la série statistique pour toutes les lister, il faut utiliser un **tableau d'effectifs**. On calcule alors les **effectifs cumulés croissants (ECC)** afin de trouver la médiane :

☞ **Exemple(s) :**

Valeur	4	5	9	15	21	52
Effectif	5	7	3	3	2	1
ECC	$\mathbf{5}$	$5+7=\mathbf{12}$	$12+3=\mathbf{15}$	$15+3=\mathbf{18}$	$18+2=\mathbf{20}$	$20+1=\mathbf{21}$
Positions	$\mathbf{1 \to 5}$	$\mathbf{6 \to 12}$	$\mathbf{13 \to 15}$	$\mathbf{16 \to 18}$	$\mathbf{19 \to 20}$	$\mathbf{21 \to 21}$

1) Quel est l'effectif *total* de cette série statistique ?

Il y a **21 éléments (impair)** dans cette série.

2) En déduire la position de la médiane de cette série statistique :

$$\text{Position de la médiane} = \frac{\mathbf{21}+1}{2} = \frac{22}{2} = \mathbf{11^{\text{ème}}\ place}$$

3) En déduire la médiane de cette série statistique :

Comme la médiane est à la 11ème position, d'après le tableau il s'agit de la valeur 5.

4) Calculer la moyenne de cette série statistique :

$$\text{Moyenne} = \frac{\text{Valeurs} \times \text{Effectifs}}{\text{Effectif total}} = \frac{4\times5+5\times7+9\times3+15\times3+21\times2+52\times1}{21} = \frac{221}{21} \approx \mathbf{10,5}$$

5) Que remarques-tu ? Comment peut-on l'expliquer ?

On remarque que la **moyenne (10,5)** est bien plus haute que la **médiane (5)**. Cela s'explique par les quelques hautes valeurs qui « tirent la moyenne vers le haut », alors qu'il y a beaucoup de petites valeurs, plus représentatives de la série.

3. Avec le tableur (TP notes DNB)

Code :

Les formules suivantes sont **à connaître** !

- ☞ Calculer le **minimum** des cases `A1` jusqu'à `K1` : « `= MIN(A1:K1)` »
- ☞ Calculer un **maximum** des cases `C1` jusqu'à `C24` : « `= MAX(C1:C24)` »
- ☞ Calculer une **moyenne** des cases `B3` jusqu'à `F15` : « `= MOYENNE(B3:F15)` »
- ☞ Calculer une **médiane** des cases `A10` jusqu'à `B26` : « `= MEDIANE(A10:B26)` »

- ❏ Aller sur le site « `madame-scohy.fr` » `> Collège > Cours > Cours 3ème > S9 : Médiane.`
- ❏ Cliquer sur le bouton « `Fichier élève` ».
- ❏ Taper le mot de passe donné par la professeure pour ouvrir le document puis aller sur l'onglet « `Notes par classes` ».
- ❏ Remplir le tableau puis recopier les valeurs ci-contre.
- ❏ (BONUS) Aller sur l'onglet « `Tableau d'effectifs` », puis tracer le **diagramme colonne** des notes.

					Global :
MIN	5	2	6	1	1
MAX	73	57	74	64	1
ÉTENDUE	68	55	68	1	63
MÉDIANE	22	13	16	16,5	18
MOYENNE	25,38	17,46	22,61	21,65	21,68

Exercices

Exercice 1 : ☆

Calculer l'**étendue** de chacune des séries de valeurs suivantes :

1) $6 \quad 8 \quad 10 \quad 13 \quad 14 \quad 17$
Étendue $= 17 - 6 = \mathbf{11}$

2) $165 \quad 175 \quad 187 \quad 165 \quad 170$
Étendue $= 187 - 165 = \mathbf{22}$

3) $0 \quad -5 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad -2 \quad -1$
Étendue $= 0 - (-5) = 0 + 5 = \mathbf{5}$

4) $1 \quad 1,2 \quad 1,4 \quad 1,85 \quad 1,6 \quad -0,72$
Étendue $= 1,85 - (-0,72) = 1,85 + 0,72 = \mathbf{2,57}$

Exercice 2 : ☆

Calculer la **médiane** de chacune des séries de valeurs suivantes :

1) $7 \quad 18 \quad 23 \quad 11 \quad 10 \quad 13 \quad 15$
$7 < 10 < 11 < 13 < 15 < 18 < 23$ série d'effectif 7 **impair** donc la médiane est au $\dfrac{7+1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4^{\text{ème}}$ élément :
Médiane $= \mathbf{13}$

2) $0 \quad -3 \quad -2 \quad 5 \quad 11 \quad 10$
$-3 < -2 < 0 < 5 < 10 < 11$ série d'effectif 6 **pair** donc la médiane est entre les $\dfrac{6}{2} = 3^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ éléments :
Médiane $= \dfrac{5+0}{2} = \mathbf{2,5}$

3) $14 \quad 41 \quad 33 \quad 26 \quad 37$
$14 < 26 < 33 < 37 < 41$ série d'effectif 5 **impair** donc la médiane est au $\dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3^{\text{ème}}$ élément :
Médiane $= \mathbf{33}$

4) $7,3 \quad 4,9 \quad 5,8 \quad 8,4 \quad 5,2 \quad 3,1 \quad 5,2 \quad 7,3$
$3,1 < 4,9 < 5,2 < 5,2 < 5,8 < 7,3 < 7,3 < 8,4$
série d'effectif 8 **pair** donc la médiane est entre les $\dfrac{8}{2} = 4^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ éléments :
Médiane $= \dfrac{5,2+5,8}{2} = \dfrac{11}{2} = \mathbf{5,5}$

Exercice 3 : ☆☆

Dans un appartement, voici la liste des puissances des ampoules :

100 W 80 W 40 W 60 W 100 W 80 W 100 W

Proposer une série de même effectif, mais dont la puissance médiane est de moitié :

Calculons d'abord la médiane de cette série : $40 < 60 < 80 < 80 < 100 < 100 < 100$.

C'est une série de 7 éléments (impair) donc la médiane est au $\dfrac{7+1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4^{\text{ème}}$ élément, donc la médiane est de **80 W**.

Il suffit de prendre la même série en divisant chaque valeur par 2 : $20 < 30 < 40 < 40 < 50 < 50 < 50$ (ce n'est pas la seule solution), de médiane **40 W**.

Exercice 4 : ☆☆☆

Inventer une série de valeurs entières et strictement inférieures à 10 dont l'effectif est 7, l'étendue 8 et la médiane 2 :

Étendue $= 8 \implies$ les plus grandes et plus petites valeurs sont 0 et 8, ou 1 et 9.
Médiane $= 2$ et effectif $= 7 \implies$ la $\dfrac{7+1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4^{\text{ème}}$ valeur est 2.

On peut donc par exemple prendre : **1** 1 1 2 9 9 **9**.

Exercice 5 : ☆

Compléter le tableau suivant et en déduire la médiane de la série :

Valeur	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	11	20	9	7	29	32	15
ECC	**11**	**31**	**40**	**47**	**76**	**108**	**123**
Rangs	**1 à 11**	**12 à 31**	**32 à 40**	**41 à 47**	**48 à 76**	**77 à 108**	**109 à 123**

L'effectif total est de 123 **impair** donc la médiane est située à la :

$\dfrac{123+1}{2} = \dfrac{124}{2} = 62^{\text{ème}}$ position

D'après la dernière ligne du tableau, on a donc **médiane**= 5.

☞ Exercice 6 : ☆

Compléter le tableau suivant et en déduire la médiane de la série :

Valeur	-5	-4	-3	-2	-1	0
Effectif	5	15	25	1	20	10
ECC	**5**	**20**	**45**	**46**	**66**	**76**
Rangs	**1 à 5**	**6 à 20**	**21 à 45**	**46 à 46**	**47 à 66**	**67 à 76**

L'effectif total est de 76 **pair** donc la médiane est située entre les :

$\frac{76}{2} = 38^{\text{ème}}$ et $39^{\text{ème}}$ positions

D'après la dernière ligne du tableau, on a donc **médiane**$= -3$.

☞ Exercice 7 : ☆☆

On a relevé la température à un même instant mais à des endroits différents :

T (en °C)	-11	-7	-1	2	5	6
Effectif	7	3	5	11	6	2
ECC	**7**	**10**	**15**	**26**	**32**	**34**
Rangs	**1 à 7**	**8 à 10**	**11 à 15**	**16 à 26**	**27 à 32**	**33 à 34**

1) Combien de relevés ont été effectués ?
Il y a eu (effectif total) $7+3+5+11+6+2 = \mathbf{34}$ relevés.

2) À combien d'endroits la température est-elle inférieure à -1°C ? à 5°C ?
En prenant les ECC on trouve que la température est inférieure à -1°C dans **15 endroits**, et à 5°C dans **32 endroits**.

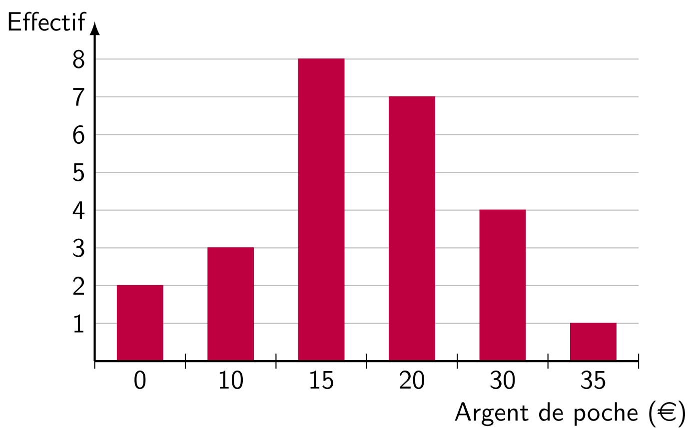
3) Remplir les 2 dernières lignes du tableau.

4) a. Déterminer la médiane de cette série.
L'effectif total de 34 (**pair**) donc la médiane est située entre les $\frac{34}{2} = 17^{\text{ème}}$ et $18^{\text{ème}}$ positions.
D'après la dernière ligne du tableau, on a donc **médiane**$=$ **2°C**.

b. Interpréter le résultat.
Dans la moitié des endroits, la température était inférieure ou égale à 2°C, et dans l'autre moitié, elle était supérieure ou égale à 2°C.

☞ Exercice 8 : ☆☆

On a demandé à des élèves la somme d'argent de poche que leurs parents leur donnent chaque mois. Voici les résultats :



Argent (€)	0	10	15	20	30	35
Effectif	**2**	**3**	**8**	**7**	**4**	**1**
ECC	**2**	**5**	**13**	**20**	**24**	**25**
Rangs	**1 à 2**	**3-5**	**6-13**	**14-20**	**21-24**	**25-25**

1) Calculer l'étendue de cette série :
Étendue$= 35 - 0 =$ **35 €**
.

2) Compléter le tableau ci-dessus.

3) Déterminer la médiane de cette série et interpréter le résultat.
L'effectif total est de 25 **impair** donc la médiane est située à la :

$$\frac{25+1}{2} = \frac{26}{2} = 13^{\text{ème}} \text{ position}$$

D'après la dernière ligne du tableau, on a donc **médiane**$=$ **15**. La moitié des élèves ont donc 15 € ou moins d'argent de poche, et l'autre moitié 15 € ou plus.

Exercice 9 : ☆☆☆

Voici une série de valeurs dont les effectifs sont donnés dans le tableau suivant :

Valeurs	9	9,5	**10**	10,5	11	11,5
Effectif	13	26	52	39	13	x
ECC	**13**	**39**	**91**	**130**	**143**	$\mathbf{143+x}$
Rangs	**1 à 13**	**14 à 39**	**40 à 91**	**92 à 130**	**131 à 143**	**144 à** $\mathbf{143+x}$

Déterminer une valeur possible de x de telle sorte que la médiane de cette série soit 10.

Pour que la médiane soit de 10, il faut qu'elle soit comprise entre les rangs 40 et 91. Il faut donc choisir x tel que $143+x$ soit entre les rangs $40\times2=80$ et $91\times2-1=182-1=181$. On peut par exemple prendre $\mathbf{x=8}$, ainsi l'effectif total est des $143+8=151$ (**impair**) et donc la médiane se trouve à la $\frac{151+1}{2}=\frac{152}{2}=76^{\text{ème}}$ position, et vaut donc bien 10 d'après les ECC ci-dessus.
Remarque : toutes les valeurs de x entre 0 (ou 1) et 38 sont valables.

Exercice 10 : ☆☆

Voici un tableau d'effectifs :

Valeur	4	7	8	42
Effectif	5	13	12	6
ECC	**5**	**18**	**30**	**36**
Rangs	**1 à 5**	**6 à 18**	**19 à 30**	**31 à 36**

1) Calculer la moyenne de cette série :

$$\text{Moyenne} = \frac{4\times5+7\times13+8\times12+42\times6}{35} \approx \mathbf{13,1}$$

2) Calculer la médiane de cette série :
Il y a 36 valeurs (pair), la médiane est donc entre les $\frac{36}{2}=18^{\text{ème}}$ et $19^{\text{ème}}$ positions, donc :
médiane$=\frac{7+8}{2}=\mathbf{7,5}$.

3) Comment expliquer la différence entre ces deux valeurs ?

On remarque que la **moyenne (13,1)** est bien plus haute que la **médiane (7,5)**. Cela s'explique par les 6 valeurs « 42 » qui « tirent la moyenne vers le haut », alors que **la médiane n'est pas influencée par les valeurs extrêmes**.

Exercice 11 : ☆☆

Voici un tableau d'effectifs :

Valeur	-55	12	13	14
Effectif	4	9	11	8
ECC	**4**	**13**	**24**	**32**
Rangs	**1 à 4**	**5 à 13**	**14 à 24**	**25 à 32**

1) Calculer la moyenne de cette série :

$$\text{Moyenne} = \frac{-55\times4+12\times9+13\times11+14\times8}{32} \approx \mathbf{4,5}$$

2) Calculer la médiane de cette série :
Il y a 32 valeurs (pair), la médiane est donc entre les $\frac{32}{2}=16^{\text{ème}}$ et $17^{\text{ème}}$ positions, donc :
médiane$=\mathbf{13}$.

3) Comment expliquer la différence entre ces deux valeurs ?

On remarque que la **moyenne (4,5)** est bien plus basse que la **médiane (13)**. Cela s'explique par les 4 valeurs « -55 » qui « tirent la moyenne vers le bas », alors que **la médiane n'est pas influencée par les valeurs extrêmes**.

Exercice 12 : ☆☆

D'après DNB Centres étrangers 2016.
Une nouvelle boutique a ouvert à Paris. Elle vend exclusivement des macarons (petites pâtisseries). L'extrait de tableur ci-dessous indique le nombre de macarons vendus une semaine :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche	TOTAL
2	Nb	324	240	310	204	318	386	468	2 250

1) Quelle formule doit être saisie dans la case I2 pour calculer le nombre total de macarons vendus dans la semaine ?
`=SOMME(B2:H2)`

2) Calculer le nombre moyen de macarons vendus par jour. Arrondir à l'unité.

Moyenne $=\frac{324+240+310+204+318+386+468}{7}=\frac{2\ 250}{7}\approx$ **312** macarons par jour.

3) Calculer le nombre médian de macarons.

Il y a 7 valeurs (impair), c'est donc la $4^{\text{ème}}$ valeur dans l'ordre croissant :
$204<240<310<\mathbf{318}<324<386<468$

4) Calculer la différence entre le nombre de macarons vendus le Dimanche et le Jeudi. À quoi correspond cette valeur ?

Étendue $=468-204=\mathbf{264}$.

Mises au Travail