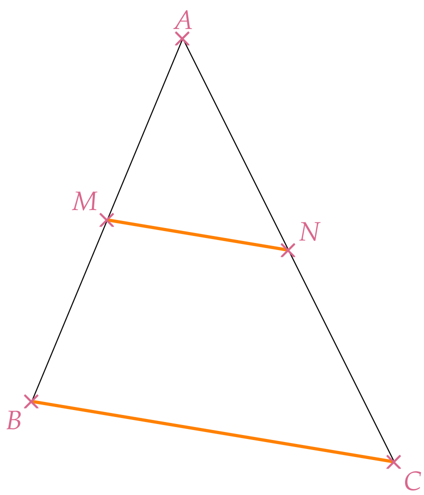
Séquence 13 : Théorème de Thalès (2) - Sens indirect

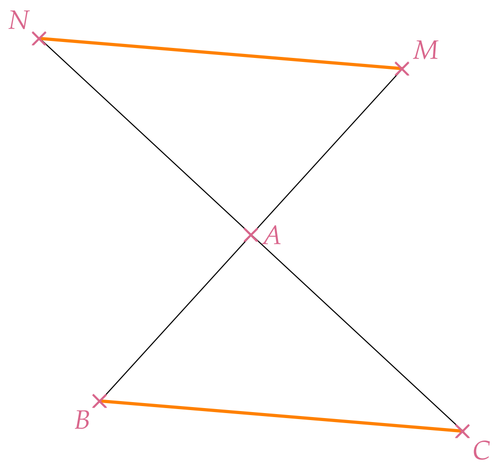
OBJECTIFS :

À la fin de cette Séquence 13, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Dans quels cas utiliser le théorème de Thalès dans le sens indirect.	Cours partie A
Les étapes de démonstration avec le théorème de Thalès dans le sens indirect.	Cours partie C

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Reconnaître quand utiliser le théorème de Thalès dans le sens indirect.	Connaître mon cours (S10 et 13 !)		
Savoir vérifier si des rapports sont égaux.	n°1		
Utiliser le théorème de Thalès dans le sens indirect (dont type brevet).	n°2, 3, 4	n°5, 6, 7	n°8

A) Cours





Propriété 1 : Rappel : Thalès sens DIRECT *(voir S10)*

Points alignés
ET
Droites parallèles
$$\Longrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Nous avons vu à la Séquence 11 que le théorème de Thalès nous permet, **lorsque l'on est dans une configuration adéquate**, de **calculer des longueurs manquantes** en établissant des rapports de longueurs égaux. Ce théorème peut aussi s'utiliser dans l'autre sens (c'est la « réciproque ») : **si on sait que les rapports de longueurs sont égaux, alors on va pouvoir montrer que les droites sont parallèles.**

Propriété 2 : Thalès sens INDIRECT

Points alignés
ET
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$
$\Longrightarrow$ Droites parallèles

B) Vérifier que des rapports sont égaux

Méthode 1 : Calculer les valeurs décimales

☞ $\frac{5}{4}$ et $\frac{11,25}{9}$: $\frac{5}{4} = 1,25$ et $\frac{11,25}{9} = 1,25$ donc on a bien $\frac{5}{4} = \frac{11,25}{9}$

☞ $\frac{7}{2}$ et $\frac{20}{6}$: $\frac{7}{2} = 3,5$ et $\frac{20}{6} \approx 3,33$ donc $\frac{7}{2} \neq \frac{20}{6}$

Remarque : Attention toutefois à cette méthode, car même si elle est simple, elle peut induire en erreur dans les cas où l'on doit arrondir les 2 fractions.

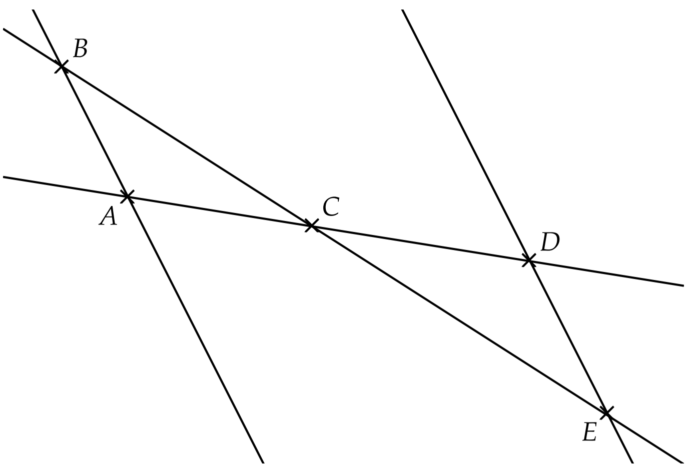
Méthode 2 : Vérifier les produits en croix

☞ $\frac{5}{4}$ et $\frac{11,25}{9}$: $5 \times 9 = 45$ et $4 \times 11,25 = 45$ donc on a bien $\frac{5}{4} = \frac{11,25}{9}$

☞ $\frac{7}{2}$ et $\frac{20}{6}$: $7 \times 6 = 42$ et $2 \times 20 = 40$ donc $\frac{7}{2} \neq \frac{20}{6}$

Remarque : L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de ne jamais devoir arrondir.

C) Exemples



On donne les longueurs suivantes :

$CD = 5$ cm ; $AC = 2$ cm ; $CE = 7,5$ cm ; $BC = 3$ cm

Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

On sait que :

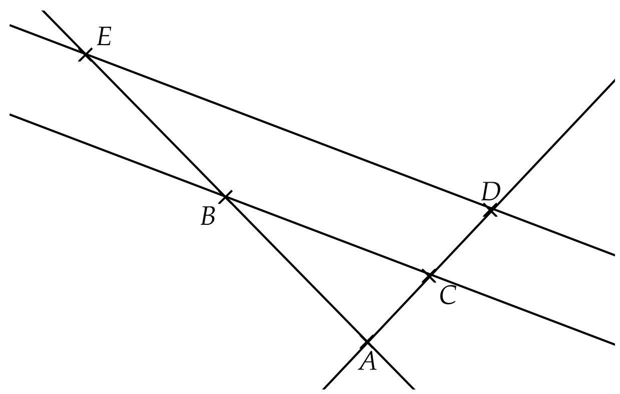
Les points B, C et E d'une part ; A, C et D d'autre part sont alignés.

Vérifions l'égalité de Thalès :

$\frac{CA}{CD} = \frac{2}{5} = 0,4$ et $\frac{CB}{CE} = \frac{3}{7,5} = 0,4$

Conclusion :

On a montré que $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$.
L'égalité de Thalès est vérifiée, donc **les droites (BA) et (DE) sont parallèles.**



On donne les longueurs suivantes :

$AC = 6,7$ cm ; $AD = 10,5$ cm ; $AB = 8,4$ cm ; $AE = 12,5$ cm

Les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ?

On sait que :

Les points A, B et E d'une part ; A, C et D d'autre part sont alignés.

Vérifions l'égalité de Thalès :

$\frac{AC}{AD} = \frac{6,7}{10,5}$ et $\frac{AB}{AE} = \frac{8,4}{12,5}$
donc $6,7 \times 12,5 = \mathbf{83,75} \neq \mathbf{88,2} = 10,5 \times 8,4$

Conclusion :

On a montré que $\frac{AC}{AD} \neq \frac{AB}{AE}$.
L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, donc **les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.**

Exercices

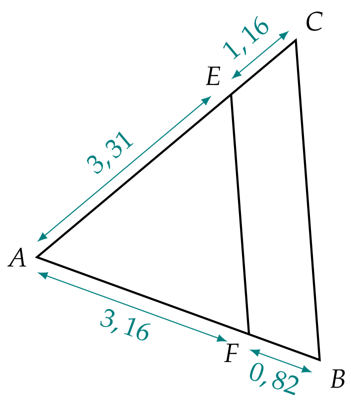
Exercice 1 : ☆

Les quotients suivants sont-il égaux ?

$\frac{5}{3}$ et $\frac{15}{9}$	$\frac{7,4}{3,6}$ et $\frac{10}{5}$	$\frac{3,6}{9}$ et $\frac{1,8}{6}$
$5 \times 9 = 45$	$7,4 \times 5 = 37$	$3,6 \times 6 = 21,6$
$3 \times 15 = 45$	$3,6 \times 10 = 36$	$1,8 \times 9 = 16,2$
OUI	NON	NON

Exercice 2 : ☆

Dans la figure ci-dessous, les droites (EF) et (BC) sont-elles parallèles ?



On sait que :

Les points A, E et C sont alignés ; les points A, F et B aussi.

Vérifions l'égalité de Thalès :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{3,31}{3,31+1,16} = \frac{3,31}{4,47} \quad \text{et} \quad \frac{AF}{AB} = \frac{3,16}{3,16+0,82} = \frac{3,16}{3,98}$$

Or : $3,31 \times 3,98 = \mathbf{13,1738}$ et $4,47 \times 3,16 = \mathbf{14,1252}$

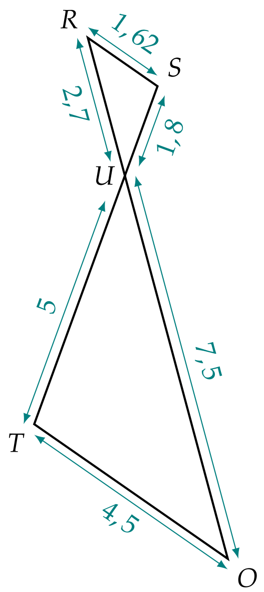
Conclusion :

On a montré que $\frac{AE}{AC} \neq \frac{AF}{AB}$.

L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, donc les droites (EF) et (BC) ne sont pas parallèles.

Exercice 3 : ☆

Dans la figure ci-dessous, les droites (TO) et (RS) sont-elles parallèles ?



On sait que :

Les points T, U et S sont alignés ; les points O, U et R aussi.

Vérifions l'égalité de Thalès :

$$\frac{US}{UT} = \frac{1,8}{5} = \mathbf{0,36} \quad \text{et} \quad \frac{UR}{UO} = \frac{2,7}{7,5} = \mathbf{0,36}$$

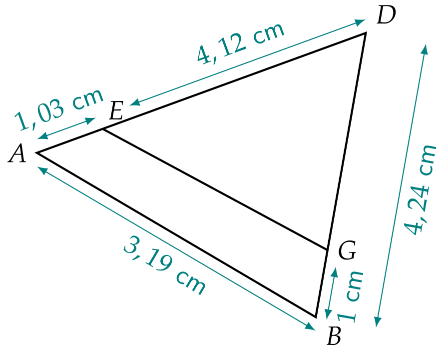
Conclusion :

On a montré que $\frac{US}{UT} = \frac{UR}{UO}$.

L'égalité de Thalès est vérifiée, donc les droites (TO) et (RS) sont parallèles.

Exercice 4 : ☆

Dans la figure ci-dessous, les droites (EG) et (AB) sont-elles parallèles ?



On sait que : les points D, E et A sont alignés ; les points D, G et B aussi.

Vérifions l'égalité de Thalès :

$$\frac{DE}{DA} = \frac{4,12}{4,12+1,03} = \frac{4,12}{5,15} \quad \text{et} \quad \frac{DG}{DB} = \frac{4,24-1}{4,24} = \frac{3,24}{4,24}$$

Or : $4,12 \times 4,24 = \mathbf{17,4688}$ et $5,15 \times 3,24 = \mathbf{16,868}$

Conclusion :

On a montré que $\frac{DE}{DA} \neq \frac{DG}{DB}$.

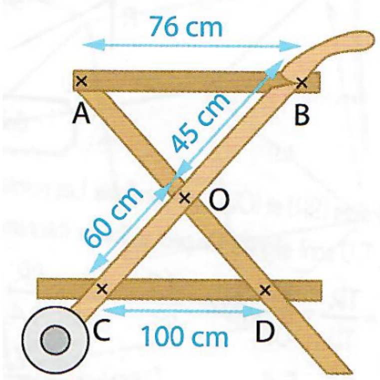
L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, donc les droites (EG) et (AB) ne sont pas parallèles.

Exercice 5 : ☆☆

D'après DNB centres étrangers 2015

« Les plateaux représentés par (AB) et (CD) pour la réalisation de cette desserte en bois sont parallèles. »

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?



On sait que : les points A, O et D sont alignés ; les points B, O et C aussi.

Vérifions l'égalité de Thalès :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{45}{60} = \mathbf{0,75} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{CD} = \frac{76}{100} = \mathbf{0,76}$$

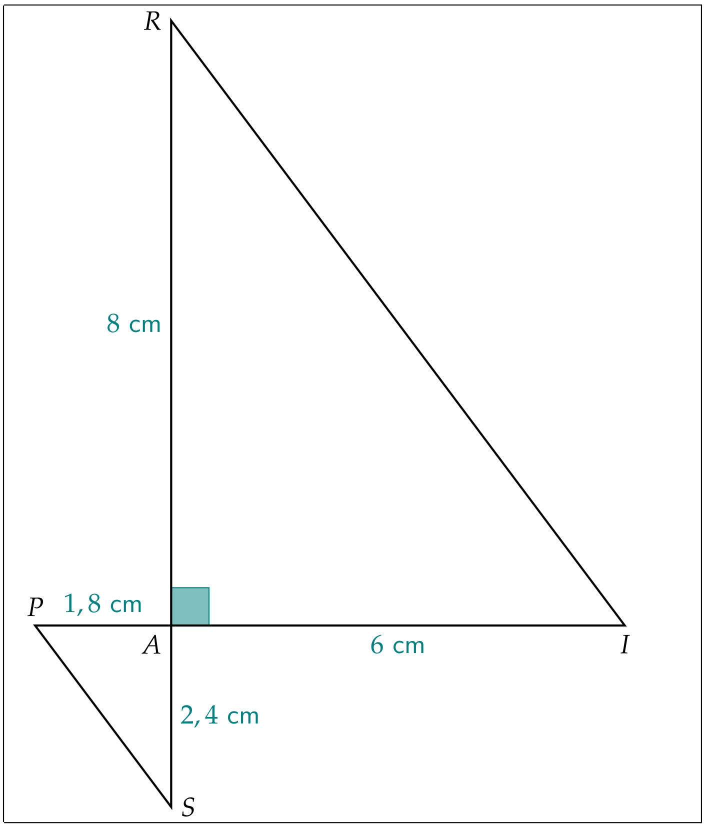
Conclusion :

On a montré que $\frac{OB}{OC} \neq \frac{AB}{CD}$.

L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, donc les plateaux (AB) et (CD) de cette desserte ne sont pas parallèles, donc **l'affirmation est fausse**.

Exercice 6 : ☆☆

1) Dans le cadre ci-contre, tracer un triangle AIR rectangle en A tel que $AI = 6$ cm et $AR = 8$ cm.
2) Placer le point P tel que $A \in [PI]$ et $AP = 1,8$ cm.
3) Placer le point S tel que $A \in [RS]$ et $AS = 2,4$ cm.
4) Les droites (RI) et (PS) sont-elles parallèles ? Justifier.



On sait que :

Les points S, A et R sont alignés ; les points P, A et I aussi.

Vérifions l'égalité de Thalès :

$$\frac{AS}{AR} = \frac{2,4}{8} = \mathbf{0,3} \quad \text{et} \quad \frac{AP}{AI} = \frac{1,8}{6} = \mathbf{0,3}$$

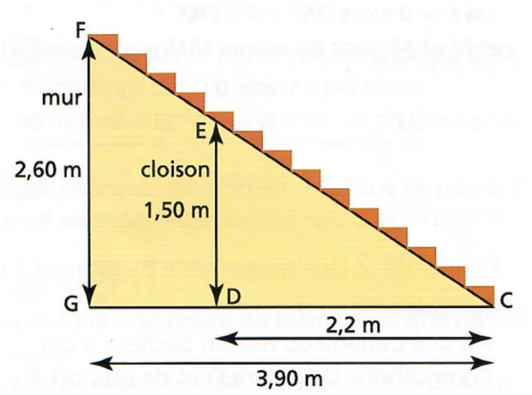
Conclusion :

On a montré que $\frac{AS}{AR} = \frac{AP}{AI}$.

L'égalité de Thalès est vérifiée, donc les droites (RI) et (PS) sont parallèles.

Exercice 7 : ☆☆

M. Hajji veut alénager un cagibi sous son escalier. Le schéma ci-dessous montre les mesures qu'il a prises après avoir installé sa cloison. Sa cloison est-elle parallèle au mur ? Justifier.



On sait que :

C, D et G sont alignés ; E, E et F aussi.

Vérifions l'égalité de Thalès :

$$\frac{CD}{CG} = \frac{2,2}{3,9} \quad \text{et} \quad \frac{ED}{FG} = \frac{1,5}{2,6}$$

$$\text{Or : } \quad 2,2 \times 2,6 = \mathbf{5,72} \quad \text{et} \quad 3,9 \times 1,5 = \mathbf{5,85}$$

Conclusion :

On a montré que $\dfrac{CD}{CG} \neq \dfrac{ED}{FG}$.

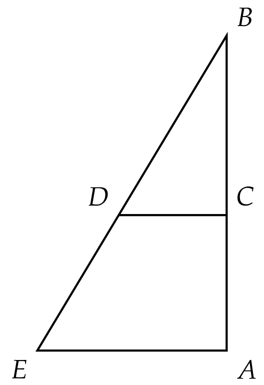
L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, donc **la cloison** (ED) **n'est pas parallèle au mur** (FG).

Exercice 8 : ☆☆☆

D'après DNB Polynésie 2014

Pour construire un mur vertical, il faut parfois utiliser un coffrage et un étayage qui maintiendra la structure verticale le temps que le béton sèche. Cet étayage peut se représenter par le schéma ci-contre. Les poutres de fer sont coupées et fixées de façon que :

- Les segments $[AB]$ et $[AE]$ sont perpendiculaires ;
- C est situé sur la barre $[AB]$;
- D est situé sur la barre $[AE]$;
- $AB = 3,5$ m ; $AE = 2,625$ m et $CD = 1,5$ m.



1) Calculer BE.

ABE est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BE^2 = AE^2 + AB^2$$

$$BE^2 = 2,625^2 + 3,5^2$$

$$BE^2 = 19,140625$$

$$BE = \sqrt{19,140625}$$

$$\boxed{BE = 4,375 \text{ m}}$$

2) Les barres $[CD]$ et $[AE]$ doivent être parallèles. À quelle distance de B faut-il placer le point C ?

On sait que :

- B, C et A sont alignés ; B, D et E aussi.
- On veut que les droites (CD) et (AE) soient alignés.

Pour cela il faut donc que l'égalité de Thalès soit vérifiée, c'est-à-dire que :

$$\frac{BC}{BA} = \left(\frac{BD}{BE}\right) = \frac{DC}{EA} \implies \frac{BC}{3,5} = \frac{1,5}{2,625} \implies BC = \frac{1,5 \times 3,5}{2,625} = 2$$

Il faut donc placer C **à 2 m** de B.

Mises au Travail