Séquence 15 : Arithmétique

✐ ✎ ✐ OBJECTIFS : ✎ ✐ ✎

À la fin de cette Séquence 15, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Le vocabulaire et les critères de divisibilité.	Cours partie A
La définition d'un nombre premier et tous les nombres premiers inférieurs à 30.	Cours partie B
La définition d'une fraction irréductible.	Cours partie C

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Effectuer une division euclidienne.	n°1, 2, 3	n°4, 5	
Reconnaître les multiples et les diviseurs d'un nombre.	n°6, 7	n°8, 9	n°10
Reconnaître un nombre premier.	n°11	n°12	n°13
Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.	n°14, 15		n°16
Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.	n°17, 18	n°19	
Résoudre des problèmes relevant de l'arithmétique (dont DNB) faisant appel au $PGCD$.		n°20, 24	n°21, 22, 23

L'**arithmétique** est le domaine des mathématiques qui étudie les **nombres entiers**, c'est-à-dire ceux « sans virgule ». C'est un domaine des mathématiques qui a notamment de nombreuses applications en cryptographie, en particulier grâce à l'étude de certains nombres particuliers appelés « nombres premiers ».

Remarque importante : Dans tout ce cours, a et b seront des nombres entiers positifs, avec $b \neq 0$.

A) Divisibilité

1. Division euclidienne

Définition 1 : Division euclidienne

Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver deux autres nombres **entiers positifs** q et r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{et} \quad r < b$$

dividende **diviseur** **quotient** **reste**

Exemple(s) :

Pose et effectue les divisions euclidiennes suivantes :

$361 \div 7$:

. . . .

. . . .

- dividende : . . . .
- diviseur : . . . .
- quotient : . . . .
- reste : . . . .

$35 \div 5$:

$$\begin{array}{rr|l} & 3\ 5 & 5 \\ \hline - & 3\ 5 & 7 \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$35 = 5 \times 7 + 0$

$0 < 5$

- dividende : **35**
- diviseur : **5**
- quotient : **7**
- reste : **0**

On dit que 35 est **divisible par** 5.

$9 \div 15$:

$$\begin{array}{rr|l} & 9 & 1\ 5 \\ \hline - & 0 & 0 \\ \hline & 9 & \end{array}$$

$9 = 15 \times 0 + 9$

$9 < 15$

- dividende : **9**
- diviseur : **15**
- quotient : **0**
- reste : **9**

2. Critères de divisibilité

Définition 2 : Divisibilité

Si le **reste** de la division euclidienne de a par b est nul $(=0)$, on dit au choix que :

- b est .... a
- a est .... b
- a est .... b

Cela revient à dire que b est « dans la table de » a.

Exemple(s) :

$5 \times 3 = 15$ donc on peut dire :

- 5 est un diviseur de 15
- 15 est divisible par 5
- 15 est un multiple de 5
- 3 est un diviseur de 15
- 15 est divisible par 3
- 15 est un multiple de 3

⚠ On ne peut PAS dire « 5 est divisible par 15 », ou « 15 est un diviseur de 3 », ou encore « 5 est un multiple de 15 ». ⚠

Propriété 1 : Critères de divisibilité

- Si un entier est **pair** (se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8), alors il est **divisible par 2** ;
- Si **la somme des chiffres** d'un nombre est divisible par 3, alors ce nombre est **divisible par 3** ;
- Si **le nombre formé par les deux derniers chiffres** d'un nombre est divisible par 4, alors il est **divisible par 4** ;
- Si un nombre **se termine par** 0 **ou** 5, alors il est **divisible par 5** ;
- Si **la somme des chiffres** d'un nombre est divisible par 9, alors ce nombre est **divisible par 9** ;
- Si un nombre **se termine par** 0, alors il est **divisible par 10** ;

Exemple(s) :

- Nombres divisibles par 2 : 2 ; 1<u>4</u> ; 9<u>6</u> ; 84<u>8</u> ; 79 65<u>0</u> ...
- Nombres divisibles par 3 : 9 ; $135 (1+3+2=6=3\times 2)$; $9\ 756 (9+7+5+6=27=3\times 9)$ ...
- Nombres divisibles par 4 : 5<u>04</u> ; 4<u>12</u>$(12=4\times 3)$; 78 9<u>36</u>$(36=4\times 9)$; 999 999 9<u>16</u>$(16=4\times 4)$ ...
- Nombres divisibles par 5 : 1<u>5</u> ; 84<u>0</u> ; 96 55<u>5</u> ; 142 96<u>0</u> ; 23 12<u>5</u> ...
- Nombres divisibles par 9 : $135 (1+3+5=9)$; $9\ 756 (9+7+5+6=27=9\times 3)$; $855 (8+5+5=18=9\times 2)$ ...
- Nombres divisibles par 10 : 4<u>0</u> ; 56<u>0</u> ; 80<u>0</u> ; 789 95<u>0</u> ; 6 00<u>0</u> ; 7 524 00<u>0</u> ...

B) Nombres premiers

1. Définition et exemples à connaître

Définition 3 : Nombre premier

Un **nombre premier** est un entier positif qui a **exactement** 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple(s) :

- 4 n'est pas premier : ....
- ⚠ 1 n'est pas un nombre premier ! Il n'a en effet qu'un seul diviseur : lui-même ⚠
- **Les 10 nombres premiers inférieurs à 30 sont à connaître PAR CŒUR :** 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

2. Décomposition en facteurs premiers

Propriété 2 : Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre entier peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un **produit de nombres premiers**.

Méthode 1 : Décomposition en facteurs premiers

Pour décomposer un nombre N en produit de facteurs premiers, on commence par chercher le plus petit nombre premier qui divise N, et on effectue cette division autant de fois que c'est possible. Puis on recommence avec le nombre premier suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir 1.

Exemple(s) :

$\begin{array}{r\|l} \mathbf{126} & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $126 = 2 \times 3^2 \times 7$	$\begin{array}{r\|l} \mathbf{504} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \end{array}$ $504 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\begin{array}{r\|l} \mathbf{2\ 530} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \end{array}$ $2\ 530 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$\begin{array}{r\|l} \mathbf{728} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \end{array}$ $728 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Plus Grand Commun Diviseur ($PGCD$)

Définition 4 : Comme son nom l'indique, le **plus grand commun diviseur** de deux nombres a et b, appelé par la suite $PGCD(a;b)$, est le plus grand de tous les diviseurs communs à a et b.

Exemple(s) :

Lister tous les diviseurs de 38 : ....

Lister tous les diviseurs de 57 : ....

Donc $\mathbf{PGCD}(38;57) = \ldots\ldots\ldots$

Remarque : cette notion n'est en théorie plus au programme de 3ème, mais elle s'avère très utile pour résoudre de nombreux exercices (en particulier les exercices de DNB).

Méthode 2 : Calculer le $PGCD$ de deux nombres

Il faut décomposer a et b en facteurs premiers, puis prendre la « partie commune »aux deux décompositions :

Exemple(s) :

Décomposer 156 et 24 en facteurs premiers :

En déduire : $PGCD(156;24) =$ ....

Quand utilise-t-on le PGCD ?

Les énoncés demandant par exemple « quel est le **plus grand nombre de groupes** de même composition que l'on peut constituer »demandent généralement en fait d'utiliser le $PGCD$. Voir les exercices concernés dans le livret d'exercices.

C) Simplification de fractions

Définition 5 : Fraction irréductible

Une fraction $\frac{a}{b}$ est dite **irréductible** si a et b ont pour UNIQUE diviseur commun 1.

Exemple(s) :

- $\frac{22}{9}$ est irréductible car : diviseurs de 22 : $\{ 1 ; 2 ; 11 ; 22 \}$ et diviseurs de 9 : $\{ 1 ; 3 ; 9 \}$
- $\frac{63}{21}$ n'est pas irréductible car 63 et 21 ont **3**, **7**, et **21** comme diviseurs communs autres que 1.

Méthode 3 : Simplifier une fraction

Il faut décomposer son numérateur ET son dénominateur en facteurs premiers, puis de simplifier les facteurs identiques :

Exemple(s) :

Simplifions la fraction $\frac{204}{72}$. Pour cela on commence par décomposer 204 et 72 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

On peut ensuite simplifier la fraction :

$$\frac{204}{72} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercices

☞ Exercice 1 : ☆

Laquelle de ces égalités correspond à la division euclidienne de 647 par 12 ?

$647 = 11 \times 54 + 53$ $\qquad$ $647 = 12 \times 53 + 11$ $\qquad$ $647 = 12 \times 52 + 23$

....

☞ Exercice 2 : ☆

Sandra peut lire sur l'écran de sa calculatrice :

$85 \vdash 6$

$Q = 14 \qquad R = 1$

Traduire ce résultat par une égalité :

....

☞ Exercice 3 : ☆

Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de :

1) 32 par 5 : ....

2) 124 par 3 : ....

3) 5 par 4 : ....

☞ Exercice 4 : ☆☆

Rémy veut ranger 184 timbres dans un classeur pouvant contenir 36 timbres par page. Combien va-t-il utiliser de pages ?

....

....

....

....

☞ Exercice 5 : ☆☆

Le quotient d'une division euclidienne est 14, son reste est 3 et son diviseur est 7. Quel est le dividende ?

....

....

☞ Exercice 6 : ☆

Vrai ou Faux ? Coche la bonne réponse :

- ☞ 36 est un multiple de 6. .... ❑ VRAI ❑ FAUX
- ☞ 6 est un diviseur de 49. .... ❑ VRAI ❑ FAUX
- ☞ 12 est un multiple de 24. .... ❑ VRAI ❑ FAUX
- ☞ 184 est divisible par 2. .... ❑ VRAI ❑ FAUX
- ☞ 250 est divisible par 5. .... ❑ VRAI ❑ FAUX
- ☞ 252 est divisible par 9. .... ❑ VRAI ❑ FAUX

☞ Exercice 7 : ☆

Écrire trois phrases en utilisant les nombres 255 et 51 (sachant que $255 = 5 \times 51$) avec les mots « diviseur », « multiple » et « divise » :

....

....

....

☞ Exercice 8 : ☆☆

⚠ EXCERCICE IMPORTANT, méthode à savoir ré-appliquer ! ⚠

Déterminer tous les **diviseurs** des nombres suivants :

- ☞ 128 : ....
- ☞ 56 : ....
- ☞ 78 : ....

☞ Exercice 9 : ☆☆

1) Déterminer la liste de tous les diviseurs de :
   - ☞ 34 : ....
   - ☞ 85 : ....

2) Quel est le **plus grand diviseur commun** de 34 et 85 ?

....

☞ Exercice 10 : ☆☆☆

1) Une plaque identique rectangulaire de dimensions 280 cm et 315 cm doit être découpée en carrés identiques, sans perte. Quelle est la dimension maximale possible des carrés ?

....

....

....

....

....

....

2) Si on vend chaque carré ainsi découpé à $0,30$ € la pièce, combien gagnera-t-on d'argent en tout ?

....

....

....

☞ Exercice 11 : ☆

Entoure les nombres premiers :

35   36   37   38   39

Exercice 12 : ☆☆

Vrai ou Faux ?

			Justification :
1) Tout nombre est diviseur de lui-même.	❏ VRAI	❏ FAUX	....
2) 1 divise tout nombre entier.	❏ VRAI	❏ FAUX	....
3) Tout nombre impair est premier.	❏ VRAI	❏ FAUX	....
4) Tout nombre pair est premier.	❏ VRAI	❏ FAUX	....
5) **Il existe une infinité de nombres premiers.**	❏ VRAI	❏ FAUX	
6) Il y a toujours un écart de 2 entre deux nombres premiers.	❏ VRAI	❏ FAUX	....

Exercice 13 : ☆☆☆

On dit que **deux nombres sont premiers entre eux** s'ils n'ont **que 1 comme diviseur commun**.

1) Trouver tous les diviseurs de 45 :

....

2) Trouver tous les diviseurs de 28 :

....

3) Les nombres 45 et 28 sont-ils premiers entre eux ?

....

4) Peut-on trouver deux nombres **pairs** premiers entre eux ? Justifier.

....

....

5) Peut-on trouver deux nombres **impairs** premiers entre eux ? Justifier.

....

....

Exercice 14 : ☆

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

12	28	75	630	5 005

Exercice 15 : ☆

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

96	168	196	60	64

Exercice 16 : ☆☆☆

Un magicien demande à un spectateur de choisir un nombre à 3 chiffres, sans le dévoiler, puis de recopier ce nombre à sa suite de manière à obtenir un nombre à 6 chiffres. Par exemple si le spectateur choisit 126, il obtient alors 126 126. Le magicien demande alors au spectateur de diviser ce nombre à 6 chiffres par 7, puis de diviser le résultat par 11, et enfin par 13. Il annonce alors : « Le résultat obtenu est le nombre à 3 chiffres du début ! »

Comment expliquer ce tour de magie ?

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 17 : ☆

Simplifie les fractions suivantes :

- $\dfrac{138}{105} =$ ....
- $\dfrac{144}{216} =$ ....
- $\dfrac{192}{288} =$ ....
- $\dfrac{245}{216} =$ ....
- $\dfrac{48}{175} =$ ....
- $\dfrac{120}{450} =$ ....
- $\dfrac{1\,925}{3\,185} =$ ....
- $\dfrac{504}{1\,050} =$ ....

☞ Exercice 18 : ☆

Simplifie les fractions suivantes :

☞ $\dfrac{2\ 604}{1\ 428} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ $\dfrac{12}{25} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ $\dfrac{126}{72} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ $\dfrac{525}{405} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ $\dfrac{720}{3\ 150} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ $\dfrac{315}{60} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ $\dfrac{140}{224} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ $\dfrac{55}{150} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ $\dfrac{124}{80} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ $-\dfrac{52}{88} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

☞ Exercice 19 : ☆☆

Dans le village *Solidarity*, 1 520 personnes ont fait un don de charité sur 1 710 habitants en tout, tandis que dans le village *Solidaritat*, 1 840 personnes ont fait un don parmi les 2 070 habitants.

1) Exprimer pour chacun de villages la *proportion* de personnes ayant effectué un don, sous forme d'une fraction, puis simplifier les deux fractions obtenues :

....

....

2) Que peut-on en conclure sur la générosité des habitants de ces deux villages ?

....

....

....

☞ Exercice 20 : ☆☆

Trouver toutes les paires de nombres dont le produit vaut 4 056 et qui sont tous deux des multiples de 13 :

....

....

....

....

....

....

....

☞ **Exercice 21 :** ☆☆☆

1) Écrire tous les diviseurs de 84 (il y en a 12 en tout !) :

....

....

2) Trois pirates se partagent un trésor constitué de lingots d'or de la façon suivante :
- ☞ Le premier pirate prend un certain nombre de lingots (notons ce nombre n).
- ☞ Le deuxième pirate prend un lingot de plus que le premier pirate (notons sa quantité de lingots m).
- ☞ Le troisième pirate prend autant de lingots que les deux premiers réunis (notons ce nombre p) !
- ☞ Quand on multiplie le nombre de lingots de chaque pirate ($n \times m \times p$), on obtient 84.

Combien chaque pirate a-t-il pris de lingots ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

☞ **Exercice 22 :** ☆☆☆

D'après DNB Asie 2015

À la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 397 ballons de baudruche qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons. L'année suivante, les *mêmes* enfants se partagent équitablement les 598 ballons utilisés cette année-là. Il en reste alors 13.

Combien d'enfants, *au maximum*, étaient présents ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

☞ **Exercice 23 :** ☆☆

D'après DNB Métropole 2021

Le Futuroscope est un parc de loisirs situé dans la Vienne. L'année 2019 a enregistré $1,9$ million de visiteurs.

1) Combien aurait-il fallu de visiteurs en plus en 2019 pour atteindre 2 millions de visiteurs ?

....

2) L'affirmation « Il y a eu environ 5 200 visiteurs par jour en 2019 » est-elle vraie ? Justifier la réponse.

....

3) Un professeur organise une sortie pédagogique au Futuroscope pour ses élèves de troisième. Il veut répartir les 126 garçons et les 90 filles par groupes. Il souhaite que chaque groupe comporte le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

a. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 126 et 90 :

....

....

....

....

....

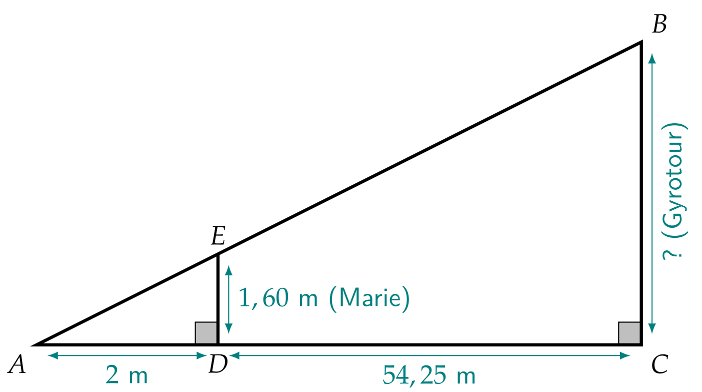
b. En déduire le plus grand nombre de groupes que le professeur pourra constituer. Combien de filles et de garçons y aura-t-il alors dans chaque groupe ?

....

....

....

4) Deux élèves de 3^e, Marie et Adrien, se souviennent avoir vu en mathématiques que les hauteurs inaccessibles pouvaient être déterminées avec l'ombre. Ils souhaitent calculer la hauteur du Gyrotour du Futuroscope. Marie se place en $[DE]$ sur la figure ci-dessous, de telle sorte que son ombre coïncide avec celle de la tour. Après avoir effectué plusieurs mesures, Adrien effectue le schéma ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), sur lequel les points A, E et B, ainsi que les points A, D et C sont alignés. Calculer la hauteur BC de la Gyrotour.



....

....

....

....

....

☞ Exercice 24 : ☆☆

D'après DNB Métropole 2022

Une collectionneuse compte ses cartes Pokémon afin de les revendre. Elle possède 252 cartes de type « feu » et 156 cartes de type « terre ».

1) a. Parmi les trois propositions suivantes, laquelle correspond à la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 252 :

Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
$2^2 \times 9 \times 7$	$2 \times 2 \times 3 \times 21$	$2^2 \times 3^2 \times 7$

....

....

b. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 156.

....

....

....

....

....

2) Elle veut réaliser des paquets identiques, c'est-à-dire contenant chacun le même nombre de cartes « terre » et le même nombre de cartes « feu » en utilisant toutes ses cartes.

a. Peut-elle faire 36 paquets ?

....

....

....

b. Quel est le nombre maximum de paquets qu'elle peut réaliser ?

....

....

....

c. Combien de cartes de chaque type contient alors chaque paquet ?

....

....

....

Mises au Travail