Séquence 15 : Arithmétique

✐ ✎ ✐ **OBJECTIFS** : ✎ ✐ ✎

À la fin de cette Séquence 15, je dois **connaître**...	Pour m'entraîner :
Le vocabulaire et les critères de divisibilité.	Cours partie A
La définition d'un nombre premier et tous les nombres premiers inférieurs à 30.	Cours partie B
La définition d'une fraction irréductible.	Cours partie C

Je dois **savoir faire**...	Pour m'entraîner : ☆	☆☆	☆☆☆
Effectuer une division euclidienne.	n°1, 2, 3	n°4, 5	
Reconnaître les multiples et les diviseurs d'un nombre.	n°6, 7	n°8, 9	n°10
Reconnaître un nombre premier.	n°11	n°12	n°13
Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.	n°14, 15		n°16
Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.	n°17, 18	n°19	
Résoudre des problèmes relevant de l'arithmétique (dont DNB) faisant appel au $PGCD$.		n°20, 24	n°21, 22, 23

L'**arithmétique** est le domaine des mathématiques qui étudie les **nombres entiers**, c'est-à-dire ceux « sans virgule ». C'est un domaine des mathématiques qui a notamment de nombreuses applications en cryptographie, en particulier grâce à l'étude de certains nombres particuliers appelés « nombres premiers ».

Remarque importante : Dans tout ce cours, a et b seront des nombres entiers positifs, avec $b \neq 0$.

A) Divisibilité

1. Division euclidienne

Définition 1 : Division euclidienne

Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver deux autres nombres **entiers positifs** q et r tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{et} \quad r < b$$

dividende (a) **diviseur** (b) **quotient** (q) **reste** (r)

Exemple(s) :

Pose et effectue les divisions euclidiennes suivantes :

$361 \div 7$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 3 & 6 & 1 & 7 \\ \cline{5-5}
- & 3 & 5 & & 5\;1 \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 1 & \\
- & & & 7 & \\ \cline{3-4}
 & & & 4 &
\end{array}$$

$361 = 7 \times 51 + 4$

$4 < 7$

- dividende : **361**
- diviseur : **7**
- quotient : **51**
- reste : **4**

$35 \div 5$:

$$\begin{array}{rrr|l}
 & 3 & 5 & 5 \\ \cline{4-4}
- & 3 & 5 & 7 \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$35 = 5 \times 7 + 0$

$0 < 5$

- dividende : **35**
- diviseur : **5**
- quotient : **7**
- reste : **0**

On dit que 35 est **divisible par** 5.

$9 \div 15$:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 9 & 1\;5 \\ \cline{3-3}
- & 0 & 0 \\ \cline{2-2}
 & 9 &
\end{array}$$

$9 = 15 \times 0 + 9$

$9 < 15$

- dividende : **9**
- diviseur : **15**
- quotient : **0**
- reste : **9**

2. Critères de divisibilité

Définition 2 : Divisibilité

Si le **reste** de la division euclidienne de a par b est nul $(= 0)$, on dit au choix que :

- b est **un diviseur de** a
- a est **divisible par** b
- a est **un multiple de** b

Cela revient à dire que b est « dans la table de » a.

Exemple(s) :

$5 \times 3 = 15$ donc on peut dire :

- 5 est un diviseur de 15
- 15 est divisible par 5
- 15 est un multiple de 5
- 3 est un diviseur de 15
- 15 est divisible par 3
- 15 est un multiple de 3

⚠ On ne peut PAS dire « 5 est divisible par 15 », ou « 15 est un diviseur de 3 », ou encore « 5 est un multiple de 15 ». ⚠

Propriété 1 : Critères de divisibilité

- Si un entier est **pair** (se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8), alors il est **divisible par 2** ;
- Si **la somme des chiffres** d'un nombre est divisible par 3, alors ce nombre est **divisible par 3** ;
- Si **le nombre formé par les deux derniers chiffres** d'un nombre est divisible par 4, alors il est **divisible par 4** ;
- Si un nombre **se termine par** 0 **ou** 5, alors il est **divisible par 5** ;
- Si **la somme des chiffres** d'un nombre est divisible par 9, alors ce nombre est **divisible par 9** ;
- Si un nombre **se termine par** 0, alors il est **divisible par 10** ;

Exemple(s) :

- Nombres divisibles par 2 : 2 ; 1<u>4</u> ; 9<u>6</u> ; 84<u>8</u> ; 79 65<u>0</u> ...
- Nombres divisibles par 3 : 9 ; $135 (1 + 3 + 2 = 6 = 3 \times 2)$; $9\,756 (9 + 7 + 5 + 6 = 27 = 3 \times 9)$ ...
- Nombres divisibles par 4 : 5<u>04</u> ; 4<u>12</u>$(12 = 4 \times 3)$; 78 9<u>36</u>$(36 = 4 \times 9)$; 999 999 9<u>16</u>$(16 = 4 \times 4)$ ...
- Nombres divisibles par 5 : 1<u>5</u> ; 84<u>0</u> ; 96 55<u>5</u> ; 142 96<u>0</u> ; 23 12<u>5</u> ...
- Nombres divisibles par 9 : $135 (1 + 3 + 5 = 9)$; $9\,756 (9 + 7 + 5 + 6 = 27 = 9 \times 3)$; $855 (8 + 5 + 5 = 18 = 9 \times 2)$ ...
- Nombres divisibles par 10 : 4<u>0</u> ; 56<u>0</u> ; 80<u>0</u> ; 789 95<u>0</u> ; 6 00<u>0</u> ; 7 524 00<u>0</u> ...

B) Nombres premiers

1. Définition et exemples à connaître

Définition 3 : Nombre premier

Un **nombre premier** est un entier positif qui a **exactement** 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple(s) :

- 4 n'est pas premier : **il a 3 diviseurs : 1, 4 et 2 !**
- ⚠ 1 n'est pas un nombre premier ! Il n'a en effet qu'un seul diviseur : lui-même ⚠
- **Les 10 nombres premiers inférieurs à 30 sont à connaître PAR CŒUR :** 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

2. Décomposition en facteurs premiers

Propriété 2 : Décomposition en facteurs premiers

Tout nombre entier peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un **produit de nombres premiers**.

Méthode 1 : Décomposition en facteurs premiers

Pour décomposer un nombre N en produit de facteurs premiers, on commence par chercher le plus petit nombre premier qui divise N, et on effectue cette division autant de fois que c'est possible. Puis on recommence avec le nombre premier suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir 1.

Exemple(s) :

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{126} & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{504} & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{2\ 530} & 2 \\ 1\ 265 & 5 \\ 253 & 11 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \qquad 2\ 530 = 2 \times 5 \times 11 \times 23$$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{728} & 2 \\ 364 & 2 \\ 182 & 2 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad 728 = 2^3 \times 7 \times 13$$

3. Plus Grand Commun Diviseur ($PGCD$)

Définition 4 : Comme son nom l'indique, le **plus grand commun diviseur** de deux nombres a et b, appelé par la suite $PGCD(a;b)$, est le plus grand de tous les diviseurs communs à a et b.

Exemple(s) :

Lister tous les diviseurs de 38 : 1 ; 2 ; 19 ; 38

Lister tous les diviseurs de 57 : 1 ; 3 ; 19 ; 57

Donc $\mathbf{PGCD(38;57) = 19}$

Remarque : cette notion n'est en théorie plus au programme de 3ème, mais elle s'avère très utile pour résoudre de nombreux exercices (en particulier les exercices de DNB).

Méthode 2 : Calculer le $PGCD$ de deux nombres

Il faut décomposer a et b en facteurs premiers, puis prendre la « partie commune »aux deux décompositions :

Exemple(s) :

Décomposer 156 et 24 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$156 = 2^2 \times 3 \times 13$ $\qquad$ $24 = 2^3 \times 3$

En déduire : $PGCD(156; 24) = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} = \mathbf{12}$

Quand utilise-t-on le PGCD ?

Les énoncés demandant par exemple « quel est le **plus grand nombre de groupes** de même composition que l'on peut constituer »demandent généralement en fait d'utiliser le $PGCD$. Voir les exercices concernés dans le livret d'exercices.

C) Simplification de fractions

Définition 5 : Fraction irréductible

Une fraction $\dfrac{a}{b}$ est dite **irréductible** si a et b ont pour UNIQUE diviseur commun 1.

Exemple(s) :

- $\dfrac{22}{9}$ est irréductible car : diviseurs de 22 : { 1 ; 2 ; 11 ; 22 } et diviseurs de 9 : { 1 ; 3 ; 9 }
- $\dfrac{63}{21}$ n'est pas irréductible car 63 et 21 ont **3**, **7**, et **21** comme diviseurs communs autres que 1.

Méthode 3 : Simplifier une fraction

Il faut décomposer son numérateur ET son dénominateur en facteurs premiers, puis de simplifier les facteurs identiques :

Exemple(s) :

Simplifions la fraction $\dfrac{204}{72}$. Pour cela on commence par décomposer 204 et 72 en facteurs premiers :

$\begin{array}{r\|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ Donc $204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$	$\begin{array}{r\|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & \end{array}$ Donc $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

On peut ensuite simplifier la fraction :

$$\frac{204}{72} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 17}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3} = \frac{17}{2 \times 3} = \boxed{\frac{17}{6}}$$

Exercices

Exercice 1 : ☆

Laquelle de ces égalités correspond à la division euclidienne de 647 par 12 ?

$647 = 11 \times 54 + 53$ — car le diviseur n'est pas 12

$647 = 12 \times 53 + 11$

$647 = 12 \times 52 + 23$ — car $23 > 12$

Exercice 2 : ☆

Sandra peut lire sur l'écran de sa calculatrice :

$85 \vdash 6$

$Q = 14 \qquad R = 1$

Traduire ce résultat par une égalité :

$$85 = 6 \times 14 + 1$$

Exercice 3 : ☆

Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de :

1) 32 par 5 : $q = 6$ et $r = 2$ car $32 = 5 \times 6 + 2$

2) 124 par 3 : $q = 41$ et $r = 1$ car $124 = 3 \times 41 + 1$

3) 5 par 4 : $q = 1$ et $r = 1$ car $5 = 4 \times 1 + 1$

Exercice 4 : ☆☆

Rémy veut ranger 184 timbres dans un classeur pouvant contenir 36 timbres par page. Combien va-t-il utiliser de pages ?

$$\begin{array}{r|l} 184 & 36 \\ -180 & 5 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Il va utiliser **6 pages** (5 complètes et une ne contenant que 4 timbres).

Exercice 5 : ☆☆

Le quotient d'une division euclidienne est 14, son reste est 3 et son diviseur est 7. Quel est le dividende ?

Dividende $= 7 \times 14 + 3 = 101$ donc le dividende de cette division est **101**.

Exercice 6 : ☆

Vrai ou Faux ? Coche la bonne réponse :

- 36 est un multiple de 6. .... ☑ VRAI ☐ FAUX
- 6 est un diviseur de 49. .... ☐ VRAI ☑ FAUX
- 12 est un multiple de 24. .... ☐ VRAI ☑ FAUX
- 184 est divisible par 2. .... ☑ VRAI ☐ FAUX
- 250 est divisible par 5. .... ☑ VRAI ☐ FAUX
- 252 est divisible par 9. .... ☑ VRAI ☐ FAUX

Exercice 7 : ☆

Écrire trois phrases en utilisant les nombres 255 et 51 (sachant que $255 = 5 \times 51$) avec les mots « diviseur », « multiple » et « divise » :

- 51 est un **diviseur** de 255.
- 255 est un **multiple** de 51.
- 51 **divise** 255.

Exercice 8 : ☆☆

⚠ EXERCICE IMPORTANT, méthode à savoir ré-appliquer ! ⚠

Déterminer tous les **diviseurs** des nombres suivants :

- 128 : 1 et 128 , 2 et 64 , 4 et 32, 8 et 16.
- 56 : 1 et 56 , 2 et 28 , 4 et 14, 7 et 8.
- 78 : 1 et 78 , 2 et 39 , 3 et 26, 6 et 13.

Exercice 9 : ☆☆

1) Déterminer la liste de tous les diviseurs de :

- 34 : 1 et 34 , 2 et 17 .
- 85 : 1 et 85 , 5 et 17 .

2) Quel est le **plus grand diviseur commun** de 34 et 85 ?

Il s'agit de **17**.

Exercice 10 : ☆☆☆

1) Une plaque identique rectangulaire de dimensions 280 cm et 315 cm doit être découpée en carrés identiques, sans perte. Quelle est la dimension maximale possible des carrés ?

Diviseurs de 280 : 1 et 280 , 2 et 140 , 4 et 70, 5 et 56 7 et 40, 8 et 35, 10 et 28, 14 et 20 soit :

$$1 < 2 < 4 < 5 < 7 < 8 < 10 < 14 < 20 < 28 < 35 < 40 < 56 < 70 < 140 < 280$$

Diviseurs de 315 : 1 et 315 , 3 et 105 , 5 et 63, 7 et 45 9 et 35, 15 et 21 soit :

$$1 < 3 < 5 < 7 < 9 < 15 < 21 < 35 < 45 < 63 < 105 < 315$$

Le plus grand diviseur commun est 35. Les carrés seront donc de taille $\boxed{\textbf{35 cm sur 35 cm}}$.

2) Si on vend chaque carré ainsi découpé à 0,30 € la pièce, combien gagnera-t-on d'argent en tout ?

Pour des plaques carrées de côté 35 cm, on pourra donc découper $315 \div 35 = \mathbf{9}$ carrés dans la longueur et $280 \div 35 = \mathbf{8}$ carrés dans la largeur, soit un total de $9 \times 8 = \mathbf{72}$ carrés en tout. À 0,30 € la pièce, cela représente donc un gain total de $72 \times 0{,}30 = \boxed{\mathbf{21{,}60}\ \text{€}}$.

Exercice 11 : ☆

Entoure les nombres premiers :

$35 = 7 \times 5$ $36 = 9 \times 4$ 37 $38 = 2 \times 19$ $39 = 3 \times 13$

Exercice 12 : ☆☆

Vrai ou Faux ?

			Justification :
1) Tout nombre est diviseur de lui-même.	☑ VRAI	❑ FAUX	$k = k \times 1$ pour tout k donc k divise k.
2) 1 divise tout nombre entier.	☑ VRAI	❑ FAUX	$k = 1 \times k$ pour tout k donc 1 divise k.
3) Tout nombre impair est premier.	❑ VRAI	☑ FAUX	Par exemple 9 est impair mais pas premier ($9 = 3 \times 3$).
4) Tout nombre pair est premier.	❑ VRAI	☑ FAUX	Par exemple 4 est pair mais pas premier ($4 = 2 \times 2$).
5) **Il existe une infinité de nombres premiers.**	☑ VRAI	❑ FAUX	
6) Il y a toujours un écart de 2 entre deux nombres premiers.	❑ VRAI	☑ FAUX	Si on prend la liste des premiers nombres premiers c'est évident.

Exercice 13 : ☆☆☆

On dit que **deux nombres sont premiers entre eux** s'ils n'ont **que 1 comme diviseur commun**.

1) Trouver tous les diviseurs de 45 :

1 ; 45 ; 3 ; 15 ; 5 ; 9.

2) Trouver tous les diviseurs de 28 :

1 ; 28 ; 2 ; 14 ; 4 ; 7.

3) Les nombres 45 et 28 sont-ils premiers entre eux ?

45 et 28 ont 1 comme **unique** diviseur commun, donc **ils sont premiers entre eux**.

4) Peut-on trouver deux nombres **pairs** premiers entre eux ? Justifier.

Non, car par définitions les nombres pairs sont tous divisibles par 2, qu'ils ont donc forcément comme diviseur commun (et pas seulement 1).

5) Peut-on trouver deux nombres **impairs** premiers entre eux ? Justifier.

Oui, par exemple 3 et 5 !

Exercice 14 : ☆

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

$12 = 2^2 \times 3$	$28 = 2^2 \times 7$	$75 = 3 \times 5^2$	$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$	$5\,005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$
$\begin{array}{r\|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 5\,005 & 5 \\ 1\,001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$

Exercice 15 : ☆

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

$96 = 2^5 \times 3$	$168 = 2^3 \times 3 \times 7$	$196 = 2^2 \times 7^2$	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$	$64 = 2^6$
$\begin{array}{r\|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$

Exercice 16 : ☆☆☆

Un magicien demande à un spectateur de choisir un nombre à 3 chiffres, sans le dévoiler, puis de recopier ce nombre à sa suite de manière à obtenir un nombre à 6 chiffres. Par exemple si le spectateur choisit 126, il obtient alors 126 126. Le magicien demande alors au spectateur de diviser ce nombre à 6 chiffres par 7, puis de diviser le résultat par 11, et enfin par 13. Il annonce alors : « Le résultat obtenu est le nombre à 3 chiffres du début ! »

Comment expliquer ce tour de magie ?

Notons N le nombre à 3 chiffres de départ. Transformer 126 en 126 126, cela revient à le multiplier par 1 001. Pour obtenir le nombre à 6 chiffres on prend donc $\boxed{N \times 1\ 001}$. Décomposons 1 001 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 1\ 001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

On a donc $1\ 001 = 7 \times 11 \times 13$. Donc quand on fait les divisions, cela revient à effectuer le calcul suivant :

$$\frac{N \times 1\ 001}{7 \times 11 \times 13} = \frac{N \times 7 \times 11 \times 13}{7 \times 11 \times 13} = N$$

Ce qui explique pourquoi on retombe forcément sur le nombre initial !

Exercice 17 : ☆

Simplifie les fractions suivantes :

- $\dfrac{138}{105} = \dfrac{2 \times \cancel{3} \times 23}{\cancel{3} \times 5 \times 7} = \boxed{\dfrac{46}{35}}$
- $\dfrac{144}{216} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$
- $\dfrac{192}{288} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{3}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$
- $\dfrac{245}{216} = \dfrac{5 \times 7 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} = \boxed{\dfrac{245}{216}}$
- $\dfrac{48}{175} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{5 \times 5 \times 7} = \boxed{\dfrac{48}{175}}$
- $\dfrac{120}{450} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 5} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$
- $\dfrac{1\ 925}{3\ 185} = \dfrac{\cancel{5} \times 5 \times \cancel{7} \times 11}{\cancel{5} \times \cancel{7} \times 7 \times 13} = \boxed{\dfrac{55}{91}}$
- $\dfrac{504}{1\ 050} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 5 \times 5 \times \cancel{7}} = \boxed{\dfrac{12}{25}}$

Exercice 18 : ☆

Simplifie les fractions suivantes :

- $\dfrac{2\ 604}{1\ 428} = \dfrac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{7}\times 31}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{7}\times 17} = \boxed{\dfrac{31}{17}}$
- $\dfrac{12}{25} = \dfrac{2\times 2\times 3}{5\times 5} = \boxed{\dfrac{12}{25}}$
- $\dfrac{126}{72} = \dfrac{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times 7}{\cancel{2}\times 2\times 2\times\cancel{3}\times\cancel{3}} = \boxed{\dfrac{7}{4}}$
- $\dfrac{525}{405} = \dfrac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times 5\times 7}{\cancel{3}\times 3\times 3\times 3\times\cancel{5}} = \boxed{\dfrac{35}{27}}$
- $\dfrac{720}{3\ 150} = \dfrac{\cancel{2}\times 2\times 2\times 2\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{5}}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times 5\times 7} = \boxed{\dfrac{8}{35}}$
- $\dfrac{315}{60} = \dfrac{3\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times 7}{2\times 2\times\cancel{3}\times\cancel{5}} = \boxed{\dfrac{21}{4}}$
- $\dfrac{140}{224} = \dfrac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 5\times\cancel{7}}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 2\times 2\times\cancel{7}} = \boxed{\dfrac{5}{8}}$
- $\dfrac{55}{150} = \dfrac{\cancel{5}\times 11}{2\times 3\times 5\times\cancel{5}} = \boxed{\dfrac{11}{30}}$
- $\dfrac{124}{80} = \dfrac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 31}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 2\times 5} = \boxed{\dfrac{31}{20}}$
- $-\dfrac{52}{88} = -\dfrac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 13}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 11} = -\boxed{\dfrac{13}{22}}$

Exercice 19 : ☆☆

Dans le village *Solidarity*, 1 520 personnes ont fait un don de charité sur 1 710 habitants en tout, tandis que dans le village *Solidaritat*, 1 840 personnes ont fait un don parmi les 2 070 habitants.

1) Exprimer pour chacun de villages la *proportion* de personnes ayant effectué un don, sous forme d'une fraction, puis simplifier les deux fractions obtenues :

Solidarity : $\dfrac{1\ 520}{1\ 710} = \dfrac{\cancel{2}\times 2\times 2\times 2\times\cancel{5}\times\cancel{19}}{\cancel{2}\times 3\times 3\times\cancel{5}\times\cancel{19}} = \boxed{\dfrac{8}{9}}$

Solidaritat : $\dfrac{1\ 840}{2\ 070} = \dfrac{\cancel{2}\times 2\times 2\times 2\times\cancel{5}\times\cancel{23}}{\cancel{2}\times 3\times 3\times\cancel{5}\times\cancel{23}} = \boxed{\dfrac{8}{9}}$

2) Que peut-on en conclure sur la générosité des habitants de ces deux villages ?

On remarque que même si l'un des deux villages a plus donné que l'autre, quand on le rapporte au nombre d'habitants la proportion est la même. Les habitants des deux villages sont donc aussi généreux les uns que les autres.

Exercice 20 : ☆☆

Trouver toutes les paires de nombres dont le produit vaut 4 056 et qui sont tous deux des multiples de 13 :

Liste des diviseurs de 4 056 (les multiples de 13 sont entourés) :

1 et 4 056 ; 2 et 2 028 ; 3 et 1 352 ; 4 et 1 014 ; 6 et 676 ; 8 et 507

12 et 338 ; 13 et 312 ; 24 et 169 ; 26 et 156 ; 39 et 104 ; 52 et 78

Dans la liste ci-dessus, les multiples de 13 sont 13, puis tous les nombres à partir de 26 (compris). Il y a donc 4 paires de nombres possibles :

13 et 312 OU 26 et 156 OU 39 et 104 OU 52 et 78

☞ Exercice 21 : ☆☆☆

1) Écrire tous les diviseurs de 84 (il y en a 12 en tout !) :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84

2) Trois pirates se partagent un trésor constitué de lingots d'or de la façon suivante :

- ☞ Le premier pirate prend un certain nombre de lingots (notons ce nombre n).
- ☞ Le deuxième pirate prend un lingot de plus que le premier pirate (notons sa quantité de lingots m).
- ☞ Le troisième pirate prend autant de lingots que les deux premiers réunis (notons ce nombre p) !
- ☞ Quand on multiplie le nombre de lingots de chaque pirate ($n \times m \times p$), on obtient 84.

Combien chaque pirate a-t-il pris de lingots ?

Résumons :

- ☞ Pirate 1 : n lingots
- ☞ Pirate 2 : $m = n + 1$ lingots
- ☞ Pirate 3 : $p = n + m = n + n + 1 = 2n + 1$ lingots

On cherche donc un triplet $(n; n+1; 2n+1)$ dans les diviseurs de 84 tels que leur produit fasse 84 !

Si on prend $n = 1$, alors $n + 1 = 2$ et $2n + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ mais $1 \times 2 \times 3 = 6 \neq 84$.

Si on prend $n = 2$, alors $n + 1 = 3$ et $2n + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$ mais 5 n'est pas un diviseur de 84.

Si on prend $\boxed{n = 3}$, alors $n + 1 = 4$ et $2n + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ et $\boxed{3 \times 4 \times 7 = 84}$.

Il faut donc que le premier pirate prenne 3 lingots, le deuxième pirate 4 lingots et le troisième pirate 7 lingots !

☞ Exercice 22 : ☆☆☆

D'après DNB Asie 2015

À la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 397 ballons de baudruche qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons. L'année suivante, les *mêmes* enfants se partagent équitablement les 598 ballons utilisés cette année-là. Il en reste alors 13.

Combien d'enfants, *au maximum*, étaient présents ?

À la première fête, il restait 37 ballons sur 397, il y a donc $397 - 37 = 360$ ballons qui ont été partagés. Le nombre d'enfants est donc un **diviseur de 360**.

À la seconde fête, il restait 13 ballons sur 598, il y a donc $598 - 13 = 585$ ballons qui ont été partagés. Le nombre d'enfants est donc un **diviseur de 585**.

Cherchons le **plus grand diviseur commun** à 360 et 585 :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\begin{array}{r|l} 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$585 = 3^2 \times 5 \times 13$$

D'où $PGCD(360; 585) = 3^2 \times 5 = \mathbf{45}$.

Il y avait donc 45 enfants.

Exercice 23 : ☆☆

D'après DNB Métropole 2021

Le Futuroscope est un parc de loisirs situé dans la Vienne. L'année 2019 a enregistré $1,9$ million de visiteurs.

1) Combien aurait-il fallu de visiteurs en plus en 2019 pour atteindre 2 millions de visiteurs ?

$2 - 1,9 = 0,1$

Il aurait donc fallu **$0,1$ millions de visiteurs** $=$ **100 000 visiteurs** supplémentaires pour atteindre les 2 millions.

2) L'affirmation « Il y a eu environ 5 200 visiteurs par jour en 2019 » est-elle vraie ? Justifier la réponse.

$1,9$ millions$/365$ jours $=$ 1 900 000$/365$ jours $\approx$ **5 205** donc **l'affirmation est vraie**.

3) Un professeur organise une sortie pédagogique au Futuroscope pour ses élèves de troisième. Il veut répartir les 126 garçons et les 90 filles par groupes. Il souhaite que chaque groupe comporte le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

a. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 126 et 90 :

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

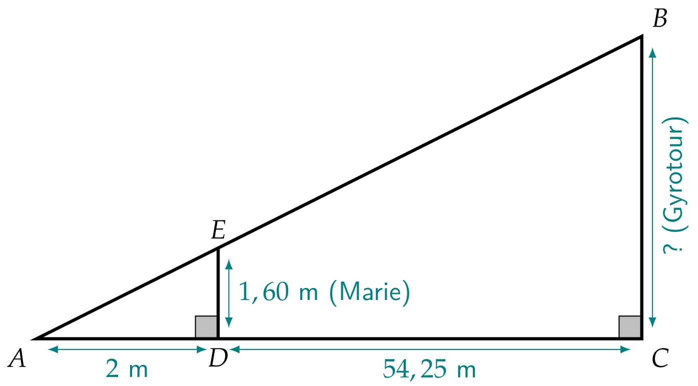
$$\mathbf{126 = 2 \times 3^2 \times 7} \qquad\qquad \mathbf{90 = 2 \times 3^2 \times 5}$$

b. En déduire le plus grand nombre de groupes que le professeur pourra constituer. Combien de filles et de garçons y aura-t-il alors dans chaque groupe ?

$PGCD(126;90) = 2 \times 3^2 = 18$
$126 \div 18 = 7$
$90 \div 18 = 5$

Il pourra donc constituer au maximum 18 groupes comprenant chacun 5 filles et 7 garçons.

4) Deux élèves de 3^e, Marie et Adrien, se souviennent avoir vu en mathématiques que les hauteurs inaccessibles pouvaient être déterminées avec l'ombre. Ils souhaitent calculer la hauteur du Gyrotour du Futuroscope. Marie se place en $[DE]$ sur la figure ci-dessous, de telle sorte que son ombre coïncide avec celle de la tour. Après avoir effectué plusieurs mesures, Adrien effectue le schéma ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), sur lequel les points A, E et B, ainsi que les points A, D et C sont alignés. Calculer la hauteur BC de la Gyrotour.



On sait que :

- Les droites (DE) et (BC) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AC) ;
- Les points A, E et B, ainsi que les points A, D et C sont alignés.

Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\left(\frac{AE}{AB}\right) = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{donc} \quad \frac{2}{2+54,25} = \frac{1,60}{BC} \quad \text{donc} \quad \mathbf{BC = \frac{1,60 \times 56,25}{2} = 45\ m}$$

La Gyrotour mesure donc 45 m de haut.

☞ **Exercice 24 :** ☆☆

D'après DNB Métropole 2022

Une collectionneuse compte ses cartes Pokémon afin de les revendre. Elle possède 252 cartes de type « feu » et 156 cartes de type « terre ».

1) a. Parmi les trois propositions suivantes, laquelle correspond à la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 252 :

Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
$2^2 \times 9 \times 7$	$2 \times 2 \times 3 \times 21$	$2^2 \times 3^2 \times 7$

Il s'agit de la **Proposition 3** car dans la 1, 9 n'est pas un nombre premier et dans la 2, c'est 21 qui ne l'est pas.

b. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 156.

$$\begin{array}{r|l} 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{156 = 2^2 \times 3 \times 13}$$

2) Elle veut réaliser des paquets identiques, c'est-à-dire contenant chacun le même nombre de cartes « terre » et le même nombre de cartes « feu » en utilisant toutes ses cartes.

a. Peut-elle faire 36 paquets ?

$252 \div 36 = 7$ mais $156 \div 36 \approx 4,333$, donc 156 n'est pas divisible par 36.

Elle **ne pourra donc pas** réaliser 36 paquets.

b. Quel est le nombre maximum de paquets qu'elle peut réaliser ?

$PGCD(252; 156) = 2^2 \times 3 = 12$

Elle pourra donc réaliser au maximum 12 paquets de cartes.

c. Combien de cartes de chaque type contient alors chaque paquet ?

$252 \div 12 = 21$
$156 \div 12 = 13$

Chaque paquet contient alors 21 cartes « feu » et 13 cartes « terre ».

Mises au Travail