Séquence 2

✐ ✎ ✐ Leçon n°1 - Nombres et calculs : Calcul numérique ✎ ✐ ✎

Notions à **connaître** :	Page(s) :
Les règles de calcul sur les fractions.	2
L'égalité des produits en croix pour les fractions.	2

❏ Trace écrite : **Carte mentale n°1 : « Calcul numérique »**, partie « Fractions ».

Code	**Automatismes** à maîtriser :	Exercices :	Page(s) :
N04	❏ Mettre des fractions sur le même dénominateur.	1 à 3	3
N05	❏ Calculer ($+$, $-$, $\times$, $\div$) avec les fractions.	4 à 5	3
N06	❏ Prendre une fraction d'une quantité.	6 à 7	4
N07	❏ Tester une égalité de fractions.	8 à 9	4

✐ ✎ ✐ Leçon n°2 - Géométrie : Le triangle rectangle ✎ ✐ ✎

Notions à **connaître** :	Page(s) :
Le sens indirect du théorème de Pythagore.	5

❏ Trace écrite : **Carte mentale n°2 : « Théorème de Pythagore »**, partie « Montrer qu'un triangle est rectangle ».

Code	**Automatismes** à maîtriser :	Exercices :	Page(s) :
G02	❏ Utiliser Pythagore sens indirect pour vérifier si un triangle est rectangle.	10 à 11	6

✐ ✎ ✐ Leçon n°3 - Données : Pourcentages ✎ ✐ ✎

Notions à **connaître** :	Page(s) :
La propriété permettant de calculer t % d'une quantité.	7
La propriété permettant d'exprimer une proportion en pourcentage.	7

❏ Trace écrite : **Carte mentale n°3 : « Proportionnalité et pourcentages »**, partie « Pourcentages ».

Code	**Automatismes** à maîtriser :	Exercices :	Page(s) :
D03	❏ Appliquer un pourcentage.	12 à 14	8
D04	❏ Exprimer une proportion en pourcentage.	15 à 16	9

✐ ✎ ✐ Mais aussi... ✎ ✐ ✎

❏ Tâche complexe : La police verte .... Page(s) 10

❏ Vers le DNB : n°4 Métropole Septembre 2018 + n°5 Métropole Juin 2021 .... Page(s) 11-13

✐ ✎ ✐ Automatismes à réviser : ✎ ✐ ✎

❏ N03 : Appliquer un programme de calcul. .... Voir séquence 1

❏ G01 : Utiliser le théorème de Pythagore sens direct pour calculer une longueur. .... Voir séquence 1

❏ D02 : Calculer une quatrième proportionnelle. .... Voir séquence 1

Leçon n°1 : Calcul numérique

A) Transformer une fraction (mettre sur le même dénominateur ou simplifier)

Propriété 1 : On ne change jamais une fraction si on multiplie ou si on divise son numérateur ET son dénominateur par un même nombre (différent de zéro !).

Exemple(s) :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} \qquad \frac{24}{18} = \frac{24 \div 6}{18 \div 6} = \frac{4}{3} \qquad \frac{24}{18} = \frac{6 \times 4}{6 \times 3} = \frac{4}{3}$$

B) Addition et soustraction

Propriété 2 : Pour additionner ou soustraire deux fractions, il faut d'abord les mettre **sur le même dénominateur** !

Ensuite on additionne ou on soustrait les numérateurs entre eux. (⚠On garde le dénominateur commun ! ⚠)

Exemple(s) :

$$\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4+2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{8}{2} = \frac{5-8}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5}{7 \times 5} + \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{10}{35} + \frac{21}{35} = \frac{31}{35}$$

C) Multiplication et division

Propriété 3 : Pour multiplier deux fractions entre elles, on multiplie les numérateurs entre eux ET les dénominateurs entre eux.

Exemple(s) :

$$\frac{2}{3} \times \frac{13}{8} = \frac{2 \times 13}{3 \times 8} = \frac{26}{24}$$

Propriété 4 : Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemple(s) :

$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{7} = \frac{5}{6} \times \frac{7}{2} = \frac{5 \times 7}{6 \times 2} = \frac{35}{12}$$

D) Fraction d'une quantité

Propriété 5 :

Pour calculer une fraction d'une quantité, on multiplie la fraction par cette quantité.

Exemple(s) :

- $\frac{3}{4}$ de 36 € $= \frac{3}{4} \times 36$ € $= 3 \times 9 = 27$ €
- $\frac{7}{10}$ de 60 g $= \frac{7}{10} \times 60$ g $= 7 \times 6 = 42$ g

E) Égalité des produits en croix

Propriété 6 :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ revient à dire que $a \times d = c \times b$

Exemple(s) :

- $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ car $3 \times 35 = 105 = 5 \times 21$
- Si $\frac{x}{8} = \frac{2}{3}$ alors $3 \times x = 2 \times 8 = 16$ et donc $x = \frac{16}{3}$

Automatisme N04 : Mettre des fractions sur le même dénominateur.

Exercice 1 :

Écrire les fractions avec 15 pour dénominateur :

$a)\ \frac{1}{3} = \frac{1\times 5}{3\times 5} = \frac{5}{15}$ $\quad b)\ \frac{7}{5} = \frac{7\times 3}{5\times 3} = \frac{21}{15}$ $\quad c)\ \frac{44}{30} = \frac{44\div 2}{30\div 2} = \frac{22}{15}$

Exercice 2 :

Mettre les fractions suivantes sur le même dénominateur :

$\frac{6}{30}$ et $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{9}$ et $\frac{9}{18}$; $\frac{7}{3}$ et $\frac{8}{12}$

$\frac{2}{5} = \frac{2\times 6}{5\times 6} = \mathbf{\frac{12}{30}}$

$\frac{2}{9} = \frac{2\times 2}{9\times 2} = \mathbf{\frac{4}{18}}$

$\frac{7}{3} = \frac{7\times 4}{3\times 4} = \mathbf{\frac{28}{12}}$

Exercice 3 :

Mettre les fractions suivantes sur le même dénominateur :

$\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{4}$ et $\frac{6}{7}$; $\frac{11}{5}$ et $\frac{1}{9}$

$\frac{2}{3} = \frac{2\times 4}{3\times 4} = \mathbf{\frac{8}{12}}$; $\frac{3}{4} = \frac{3\times 3}{4\times 3} = \mathbf{\frac{9}{12}}$

$\frac{5}{4} = \frac{5\times 7}{4\times 7} = \mathbf{\frac{35}{28}}$; $\frac{6}{7} = \frac{6\times 4}{7\times 4} = \mathbf{\frac{24}{28}}$

$\frac{11}{5} = \frac{11\times 9}{5\times 9} = \mathbf{\frac{99}{45}}$; $\frac{1}{9} = \frac{1\times 5}{9\times 5} = \mathbf{\frac{5}{45}}$

Automatisme N05 : Calculer $(+,\ -,\ \times,\ \div)$ avec les fractions.

Exercice 4 :

Effectue les calculs suivants :

$A = \frac{2}{5} + \frac{7}{10}$

$A = \frac{4}{10} + \frac{7}{10} = \frac{4+7}{10} = \frac{11}{10}$

$B = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

$B = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{4+5}{6} = \frac{9}{6} \left(= \frac{3}{2}\right)$

$C = \frac{7}{2} - \frac{21}{6}$

$C = \frac{21}{6} - \frac{21}{6} = \frac{21-21}{6} = 0$

$D = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}$

$D = \frac{1}{12} - \frac{4}{12}$

$D = \frac{1-4}{12} = \frac{-3}{12} \left(= -\frac{1}{4}\right)$

$E = \frac{2}{11} + \frac{4}{9}$

$E = \frac{18}{99} + \frac{44}{99}$

$E = \frac{18+44}{99} = \frac{62}{99}$

$F = 3 + \frac{5}{13}$

$F = \frac{39}{13} + \frac{5}{13}$

$F = \frac{39+5}{13} = \frac{44}{13}$

Exercice 5 :

Effectue les calculs suivants :

$A = \frac{3}{4} \times \frac{-5}{2} = \frac{3\times(-5)}{4\times 2} = \frac{-15}{8}$

$B = -\frac{12}{5} \times \frac{-10}{3} = \frac{-12\times(-10)}{5\times 3} = \frac{120}{15} (= 8)$

$C = \frac{10}{3} \times 3 = \frac{10\times 3}{3} = \frac{30}{3} = 10$

$D = \frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$

$E = \frac{-2}{7} \div \frac{3}{14} = \frac{-2}{7} \times \frac{14}{3} = \frac{28}{21} \left(= \frac{-4}{3}\right)$

$F = \frac{20}{9} \div 8 = \frac{20}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{20}{72} \left(= \frac{5}{18}\right)$

Automatisme N06 : Prendre une fraction d'une quantité.

☞ **Exercice 6 :**

$\frac{2}{3}$ de $33 = \frac{2}{3} \times 33 = \mathbf{22}$

$\frac{9}{5}$ de $128 = \frac{9}{5} \times 128 = \mathbf{230,4}$

$\frac{14}{15}$ de $495 = \frac{14}{15} \times 495 = \mathbf{462}$

$\frac{7}{2}$ de $21 = \frac{7}{2} \times 21 = \mathbf{73,5}$

$\frac{41}{42}$ de $126 = \frac{41}{42} \times 126 = \mathbf{123}$

$\frac{8}{36}$ de $9 = \frac{8}{36} \times 9 = \mathbf{2}$

☞ **Exercice 7 :**

1) Manel boit les trois cinquièmes d'une bouteille d'eau de 50 cL.
Quelle quantité d'eau boit-elle ?

Elle boit $\frac{3}{5} \times 50$ cL $= 30$ cL d'eau.

2) Ce lundi, $\frac{2}{3}$ des 1254 clients d'un site Internet sont des jeunes de moins de 25 ans. Parmi ces jeunes, $\frac{1}{4}$ achètent des jeux vidéo.
Combien de jeunes ont acheté un jeu vidéo ?

Parmi les clients, il y en a $\frac{2}{3} \times 1254 = 836$ qui ont moins de 25 ans.

Parmi eux, $\frac{1}{4} \times 836 = 209$ ont acheté un jeu vidéo.

3) Axel mange trois septièmes d'un cake, sa sœur prend deux cinquièmes du reste.
Quelle est la proportion du cake mangée par sa sœur ?

Il reste $1 - \frac{3}{7} = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$ du cake après le passage d'Axel.

Sa sœur mange donc $\frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{35}$ du cake.

4) $\frac{5}{18}$ de la surface de la Terre sont recouverts de terres, dont $\frac{66}{75}$ sont habités.
Quelle fraction de la surface de la Terre est habitée ?

On calcule $\frac{66}{75}$ de $\frac{5}{18}$:

$$\frac{66}{75} \times \frac{5}{18} = \left(\frac{330}{1350} =\right) \frac{6 \times 11 \times 5}{15 \times 5 \times 6 \times 3} = \frac{11}{45}$$ de la surface de notre planète est habitée.

Automatisme N07 : Tester une égalité de fractions.

☞ **Exercice 8 :**

Les fractions suivantes sont-elles égales ? Justifier :

$\frac{38}{68} \overset{?}{=} \frac{40}{70}$

$38 \times 70 = \mathbf{2\,660}$ et $68 \times 40 = \mathbf{2\,720}$.
Donc $\frac{38}{68} \neq \frac{40}{70}$.

$\frac{9}{2} \overset{?}{=} \frac{36}{8}$

$9 \times 8 = \mathbf{72}$ et $2 \times 36 = \mathbf{72}$.
Donc $\frac{9}{2} = \frac{36}{8}$.

$\frac{3,4}{5,2} \overset{?}{=} \frac{20,4}{31,2}$

$3,4 \times 31,2 = \mathbf{106,08}$ et $5,2 \times 20,4 = \mathbf{106,08}$.
Donc $\frac{3,4}{5,2} = \frac{20,4}{31,2}$

☞ **Exercice 9 :**

Les fractions suivantes sont-elles égales ? Justifier :

$\frac{7}{9} \overset{?}{=} \frac{14}{16}$

$7 \times 16 = \mathbf{112}$ et $9 \times 14 = \mathbf{126}$.
Donc $\frac{7}{9} \neq \frac{14}{16}$.

$\frac{13}{44} \overset{?}{=} \frac{52}{176}$

$13 \times 176 = \mathbf{2\,288}$ et $44 \times 52 = \mathbf{2\,288}$.
Donc $\frac{13}{44} = \frac{52}{176}$.

$\frac{95}{68} \overset{?}{=} \frac{475}{340}$

$95 \times 340 = \mathbf{32\,300}$ et $68 \times 475 = \mathbf{32\,300}$.
Donc $\frac{95}{68} = \frac{475}{340}$.

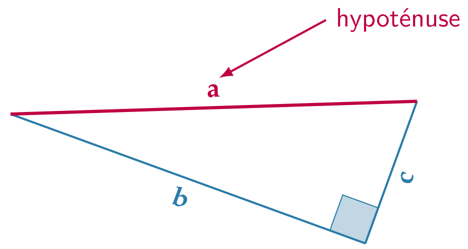
Leçon n°2 : Le triangle rectangle

Propriété 1 : Égalité de Pythagore (rappel)

Dans un **triangle rectangle**, le **carré** de la longueur de l'**hypoténuse** est égal à la **somme des carrés** des longueurs des deux autres côtés.

Dans l'exemple ci-contre on a donc :

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$



Remarque : Cette propriété est une « équivalence ». Cela signifie qu'elle fonctionne dans les deux sens. Autrement dit :

Si un triangle est rectangle, alors l'égalité de Pythagore est vérifiée.

Et réciproquement :

Si les longueurs d'un triangle respectent l'égalité de Pythagore, alors ce triangle est rectangle.

Méthode 1 : Vérifier si un triangle est rectangle avec le théorème de Pythagore dans le sens indirect

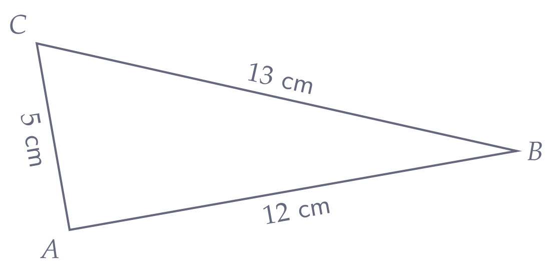
Le principe est de **vérifier si l'égalité de Pythagore est vérifiée**. Si c'est le cas, alors le triangle est rectangle, sinon il ne l'est pas.

Attention : Comme on ne sait pas si c'est égal ou pas au départ, on ne peut pas écrire l'égalité de Pythagore telle quelle !

1. On repère le **côté le plus long**. SI le triangle s'avère être rectangle, ce sera l'hypoténuse (mais on ne peut pas l'appeler comme ça tant qu'on ne sait pas si c'est rectangle !).
2. On calcule **d'une part** ce côté au carré, et **d'autre part** la somme des deux autres côtés au carré.
3. On conclue : si l'égalité est vérifiée, le triangle est rectangle, sinon il n'est pas rectangle.

Exemple(s) :

ABC est-il un triangle rectangle ?



Dans le triangle ABC, $[BC]$ est le **côté le plus long**.

D'une part :	D'autre part :
$BC^2 = 13^2$	$AC^2 + AB^2 = 5^2 + 12^2$
$BC^2 = \mathbf{169}$	$AC^2 + AB^2 = 25 + 144$
	$AC^2 + AB^2 = \mathbf{169}$

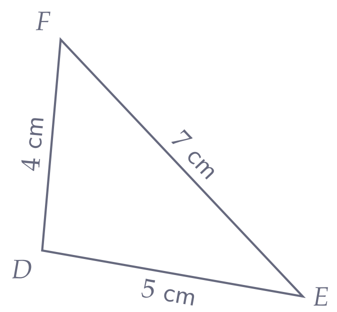
On constate que :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc **le triangle ABC est rectangle en A**.

Exemple(s) :

DEF est-il un triangle rectangle ?



Dans le triangle DEF, $[EF]$ est le **côté le plus long**.

D'une part :	D'autre part :
$EF^2 = 7^2$	$DF^2 + DE^2 = 4^2 + 5^2$
$EF^2 = \mathbf{49}$	$DF^2 + DE^2 = 16 + 25$
	$DF^2 + DE^2 = \mathbf{41}$

On constate que :

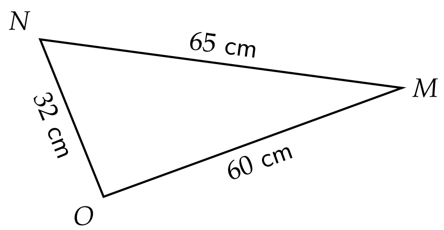
$$EF^2 \neq DF^2 + DE^2$$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc **le triangle DEF n'est pas rectangle**.

Automatisme G02 : Utiliser le théorème de Pythagore dans le sens indirect pour vérifier si un triangle est rectangle.

Exercice 10 :

MNO est-il un triangle rectangle ?



Dans le triangle MNO, $[MN]$ est le **côté le plus long**.

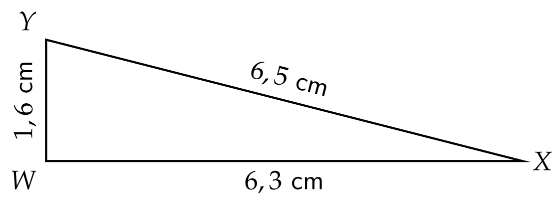
D'une part :	D'autre part :
$MN^2 = 65^2$	$ON^2 + OM^2 = 32^2 + 60^2$
$MN^2 = \mathbf{4\ 225}$	$ON^2 + OM^2 = 1\ 024 + 3\ 600$
	$ON^2 + OM^2 = \mathbf{4\ 624}$

On constate que :

$$MN^2 \neq ON^2 + OM^2$$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc **le triangle MON n'est pas rectangle**.

WXY est-il un triangle rectangle ?



Dans le triangle WXY, $[XY]$ est le **côté le plus long**.

D'une part :	D'autre part :
$XY^2 = 6,5^2$	$WY^2 + WX^2 = 1,6^2 + 6,3^2$
$XY^2 = \mathbf{42,25}$	$WY^2 + WX^2 = 2,56 + 39,69$
	$WY^2 + WX^2 = \mathbf{42,25}$

On constate que :

$$XY^2 = WX^2 + WY^2$$

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc **le triangle WXY est rectangle en W**.

Exercice 11 :

1) Le triangle WXY est tel que $WY = 4$ cm, $WX = 5$ cm, et $XY = 3$ cm. Ce triangle est-il rectangle ?

Dans le triangle WXY, le plus grand côté est $[WX]$.

D'une part : $WX^2 = 5^2 = \mathbf{25}$

D'autre part : $WY^2 + XY^2 = 4^2 + 3^2 = \mathbf{25}$

On constate que $WX^2 = WY^2 + XY^2$, l'égalité de Pythagore est vérifiée donc WXY **est rectangle** en Y.

2) Le triangle MNO est tel que $NO = 5{,}4$ cm, $MO = 7{,}2$ cm et $MN = 8{,}9$ cm. Ce triangle est-il rectangle ?

Dans le triangle MNO, le plus grand côté est $[MN]$.

$MN^2 = 8{,}9^2 = \mathbf{79{,}21}$

$MO^2 + NO^2 = 7{,}2^2 + 5{,}4^2 = \mathbf{81}$

On constate que $MN^2 \neq MO^2 + NO^2$, l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc MNO **n'est pas rectangle**.

3) Le triangle JKL est tel que $JK = 3{,}5$ cm, $JL = 2{,}8$ cm et $KL = 2{,}1$ cm. Ce triangle est-il rectangle ?

Dans le triangle JKL, le plus grand côté est $[JK]$.

$JK^2 = 3{,}5^2 = \mathbf{12{,}25}$

$JL^2 + KL^2 = 2{,}8^2 + 2{,}1^2 = \mathbf{12{,}25}$

On constate que $JK^2 = JL^2 + KL^2$, l'égalité de Pythagore est vérifiée donc JKL **est rectangle** en L.

Leçon n°3 : Pourcentages

Propriété 1 : Pourcentage d'une quantité

Pour calculer $t\%$ d'une quantité, il suffit de multiplier cette quantité par $\frac{t}{100}$.

Exemple(s) :

- $12\ \%$ de $150 = \dfrac{12}{100} \times 150 = 18$
- $16\ \%$ de $284 = \dfrac{16}{100} \times 284 = 45,44$
- 1 500 personnes assistent à un concert. 60 % sont des femmes. Quel est le nombre de femmes dans le public ?

  60 % de 1 500 personnes $= \dfrac{60}{100} \times 1\ 500 = 900$, donc il y a 900 femmes.
- Dans un gâteau de 350 g, il y a 30 % de chocolat. Quelle est la masse de chocolat dans ce gâteau ?

  30 % de 350 g $= \dfrac{30}{100} \times 350 = 105$, donc il y a 105 g de chocolat dans ce gâteau.

Propriété 2 : Exprimer une proportion en pourcentage

Pour exprimer une proportion en pourcentage, il faut la mettre sous forme d'une fraction de dénominateur 100. On peut pour cela s'aider d'un tableau de proportionnalité.

Exemple(s) :

Un gâteau de 160 g contient 50 g de chocolat. Quel est le pourcentage de chocolat dans ce gâteau ?
Cela revient tout simplement à se demander combien il y a de chocolat dans 100 g du gâteau !

Chocolat (en g)	50	x
Gâteau (en g)	160	100

D'après l'égalité des produits en croix :

$$x \times 160 = 50 \times 100$$

$$\text{soit : } x = \frac{50 \times 100}{160} = 31,25$$

Ce gâteau contient donc 31,25 % de chocolat.

Automatisme D03 : Appliquer un pourcentage.

☞ Exercice 12 :

Calculer :

- ☞ $50~\%$ de $40 = \dfrac{50}{100} \times 40 = \mathbf{20}$
- ☞ $40~\%$ de $42 = \dfrac{40}{100} \times 42 = \mathbf{16,8}$
- ☞ $90~\%$ de $56 = \dfrac{90}{100} \times 56 = \mathbf{50,4}$
- ☞ $25~\%$ de $60 = \dfrac{25}{100} \times 60 = \mathbf{15}$
- ☞ $50~\%$ de $50 = \dfrac{50}{100} \times 50 = \mathbf{25}$
- ☞ $10~\%$ de $4 = \dfrac{10}{100} \times 4 = \mathbf{0,4}$
- ☞ $20~\%$ de $7 = \dfrac{20}{100} \times 7 = \mathbf{1,4}$
- ☞ $30~\%$ de $3 = \dfrac{30}{100} \times 3 = \mathbf{0,9}$
- ☞ $26~\%$ de $57 = \dfrac{26}{100} \times 57 = \mathbf{14,82}$
- ☞ $86~\%$ de $71 = \dfrac{86}{100} \times 71 = \mathbf{61,06}$

☞ Exercice 13 :

Calculer :

- ☞ $40~\%$ de $40 = \dfrac{40}{100} \times 40 = \mathbf{16}$
- ☞ $90~\%$ de $6 = \dfrac{90}{100} \times 6 = \mathbf{5,4}$
- ☞ $25~\%$ de $72 = \dfrac{25}{100} \times 72 = \mathbf{18}$
- ☞ $50~\%$ de $32 = \dfrac{50}{100} \times 32 = \mathbf{16}$
- ☞ $10~\%$ de $81 = \dfrac{10}{100} \times 81 = \mathbf{8,1}$
- ☞ $32~\%$ de $60 = \dfrac{32}{100} \times 60 = \mathbf{19,2}$
- ☞ $99~\%$ de $10 = \dfrac{99}{100} \times 10 = \mathbf{9,9}$
- ☞ $30~\%$ de $70 = \dfrac{30}{100} \times 70 = \mathbf{21}$
- ☞ $75~\%$ de $3 = \dfrac{75}{100} \times 3 = \mathbf{2,25}$
- ☞ $15~\%$ de $21 = \dfrac{15}{100} \times 21 = \mathbf{3,15}$

☞ Exercice 14 :

1) Le cadeau commun que nous souhaitons faire à Nadia coûte 150 €. Je participe à hauteur de 14 % du prix total. Combien ai-je donné pour le cadeau de Nadia ?

14 % de 150 € $= \dfrac{14}{100} \times 150 = 21$ donc **j'ai donné 21 €** pour le cadeau de Nadia.

2) Dans une entreprise de 350 salariés, il y a 26 % de cadres. Combien y a-t-il de cadres dans cette entreprise ?

26 % de 350 salariés $= \dfrac{26}{100} \times 350 = 91$ donc **il y a 91 cadres** dans cette entreprise.

3) Une pomme est constituée à 85 % d'eau. Quelle masse d'eau est contenue dans une pomme de 150 g ?

85 % de 150 g $= \dfrac{85}{100} \times 150 = 127,5$ donc **une pomme de 150 g contient 127,5 g** d'eau.

4) Parmi les 93 élèves de 3^e de l'année dernière qui ont passé le DNB, $82,8$ % l'ont obtenu. Combien d'élèves cela représente-t-il ?

$82,5$ % de 93 élèves $= \dfrac{82,5}{100} \times 93 \approx 77$ donc **77 élèves ont obtenu le DNB** l'an dernier.

Automatisme D04 : Exprimer une proportion en pourcentage.

Exercice 15 :

1) Cinq adultes sur huit boivent du café le matin. Exprimer cette proportion en pourcentage :

$$\frac{5}{8} = 0,625 = \frac{62,5}{100} = 62,5\%$$

2) Dans le collège Paul Bert, il y a 455 élèves, dont 123 font espagnol en seconde langue. Calculer le pourcentage des élèves de ce collège faisant espagnol LV2 ?

Espagnol LV2	123	x
Total	455	100

$$x = \frac{100 \times 123}{455} \approx 27$$

Il y a environ 27 % des élèves du collège Paul Bert qui font Espagnol LV2.

3) Le cadeau commun que nous souhaitons faire à Rose coûte 140 €. Je participe à hauteur de 49 €. Calculer la proportion en pourcentage de ma participation sur le prix total du cadeau.

La proportion p est donnée par le quotient : $\frac{49}{140} = 0{,}35 = \frac{35}{100}$. J'ai donc donné 35 % du montant total du cadeau.

Exercice 16 :

On donne la répartition des élèves d'un club :

	Filles	Garçons
Enfants	23	17
Adultes	67	68

1) Parmi les enfants, quel est le pourcentage de filles ?

Il y a 23 filles parmi les $23 + 17 = 40$ enfants.

$$\frac{23}{40} = 0,575 = \frac{57,5}{100} = 57,5\%$$

Parmi les enfants, 57,5 % sont des filles.

2) Quel est le pourcentage d'enfants de ce club ?

Il y a en tout $40 + 67 + 68 = 175$ personnes dans ce club, dont 40 enfants (voir question précédente).

Enfants	40	n
Total	175	100

$$n = \frac{40 \times 100}{175} \approx 22,9$$

Parmi les menbres du club, environ 22,9 % sont des enfants.

3) Trois collégiennes de 12 ans viennent de s'inscrire dans ce club. Quel est désormais le pourcentage d'enfants filles dans ce club ?

Il y a désormais $175 + 3 = 178$ membres dans ce club dont $23 + 3 = 26$ enfants filles.

$$\frac{26}{178} \approx 0,146 = \frac{14,6}{100} = 14,6\%$$

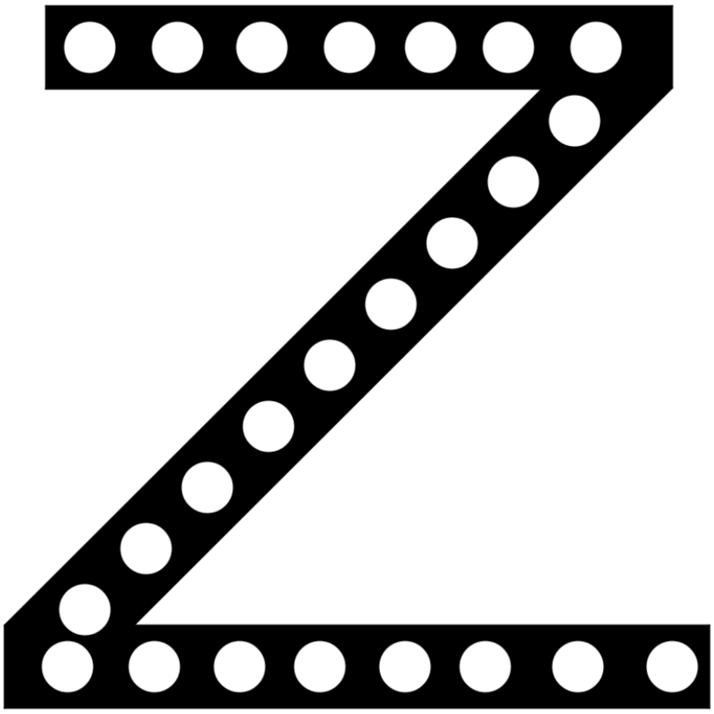
Désormais parmi les menbres du club, environ 14,6 % sont des enfants filles.

Tâche complexe : La police verte

L'encre utilisée pour imprimer les documents est un polluant qui nécessite d'avoir recours à des procédés coûteux lors du recyclage.

Hervé a trouvé un moyen surprenant mais efficace d'économiser de l'encre, lorsqu'il est vraiment obligé d'imprimer un document : il utilise une police dont les caractères sont troués !

Exceptionnellement, la lettre Z de cette police est agrandie ci-dessous :



Pour cette lettre quel est à peu près le pourcentage d'économie ?

Mesures approximatives :

- ☞ Rectangle du haut : $1,1$ cm $\times 8$ cm soit $\mathbf{8,8}$ **cm²**
- ☞ Rectangle du bas : $1,1$ cm $\times 9$ cm soit $\mathbf{9,9}$ **cm²**
- ☞ Parallélogramme : $1,1$ cm $\times 9,5$ cm soit $\mathbf{10,45}$ **cm²**
- ☞ Chaque « trou » a un diamètre de $0,6$ cm donc une surface d'environ $\mathbf{0,28}$ **cm²**

Donc l'aire totale mesure :

$$\mathcal{A}_{\text{totale}} = 8,8 + 9,9 + 10,45 = \mathbf{29,15\ cm^2}$$

Les 24 trous représentent eux une surface de :

$$\mathcal{A}_{\text{disques}} = 24 \times 0,28 = \mathbf{6,72\ cm^2}$$

On peut donc calculer le pourcentage d'économies réalisées :

Surface économisée	**6,72 cm²**	x
Surface totale	**29,15 cm²**	100

$$x = \frac{6,72 \times 100}{29,15} \approx \mathbf{23}$$

Cette police d'écriture permet donc de faire environ 23 % d'économie d'encre pour l'impression de la lettre Z.

Vers le DNB

☞ **Exercice 17** - ***d'après Métropole Septembre 2019 (exercice n°4 - 16 points)*** :

Pour le mariage de Dominique et Camille, le pâtissier propose deux pièces montées constituées de gâteaux de tailles et de formes différentes.

La tour de Pise :

La première pièce montée est constituée d'un empilement de 4 gâteaux de forme cylindrique, de même hauteur et dont le diamètre diminue de 8 cm à chaque étage.

Le gâteau du bas a pour diamètre 30 cm et pour hauteur 6 cm.

La tour Carrée :

La deuxième pièce montée est constituée d'un empilement de 3 pavés droits à base carrée de même hauteur. La longueur du côté de la base diminue de 8 cm à chaque étage.

La hauteur des gâteaux est 8 cm ; le côté de la base du gâteau du bas mesure 24 cm.

Tous les gâteaux ont été confectionnés à partir de la recette ci-dessous :

Recette du gâteau pour 100 g de chocolat :

- ☞ 65 g de sucre
- ☞ 2 oeufs
- ☞ 75 g de beurre
- ☞ 30 g de farine

1) Quel est le ratio (masse de beurre : masse de chocolat) ? Donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Le ratio est égal à $\dfrac{75}{100} = \dfrac{3 \times 25}{4 \times 25} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$.

2) Calculer la quantité de farine nécessaire pour 250 g de chocolat noir suivant la recette ci-dessus.

On a $250 = 2{,}5 \times 100$: il faut donc multiplier les quantités par $2{,}5$. En particulier il faudra :

$30 \times 2{,}5 = 3 \times 25 =$ **75 g de farine**. On peut aussi faire un tableau de proportionnalité.

3) Calculer la longueur du côté de la base du plus petit gâteau de la tour Carrée.

Le plus petit gâteau carrée a une base carré de côté : $24 - 8 - 8 =$ **8 cm**.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h$$

L'exercice continue en page 12.

4) Quelle est la tour qui a le plus grand volume ? Justifier votre réponse en détaillant les calculs.

☞ Volume de tour de Pise :
$\pi \times 15^2 \times 6 + \pi \times 11^2 \times 6 + \pi \times 7^2 \times 6 + \pi \times 3^2 \times 6$
$= 6\pi \left(15^2 + 11^2 + 7^2 + 3^2\right) = 6\pi(225 + 121 + 49 + 9) = 6\pi \times 404 = 2\,424\pi \approx 7\,615$ cm^3.

☞ Volume de tour Carrée :
$24^2 \times 8 + 16^2 \times 8 + 8^2 \times 8 = 8 \times \left(24^2 + 16^2 + 8^2\right) = 8 \times 896 = 7\,168$ cm^3.
C'est la tour de Pise qui a le plus grand volume.

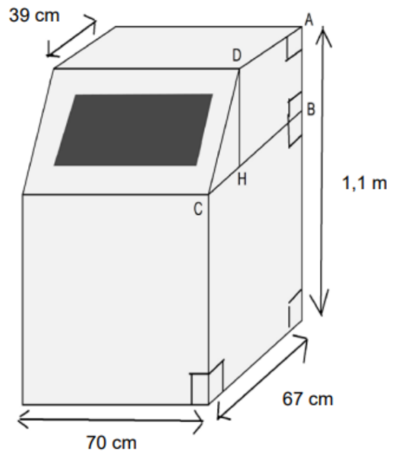
☞ **Exercice 18** - ***d'après Métropole Juin 2021 (exercice n°5 - 20 points)*** :

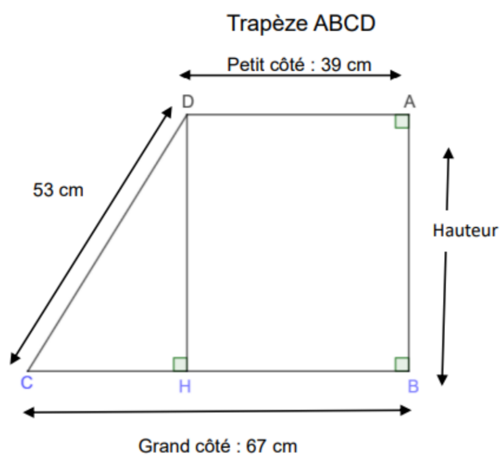
La production annuelle de déchets par Français était de 5,2 tonnes par habitant en 2007.
Entre 2007 et 2017, elle a diminué de 6,5 %.
1) De combien de tonnes la production annuelle de déchets par Français en 2017 a-t-elle diminué par rapport à l'année 2007 ?

$$6,5 \text{ \% de } 5,2 \text{ tonnes} = \frac{6,5}{100} \times 5,2 \text{ tonnes} = \mathbf{0,338 \text{ tonne}}$$

Par rapport à 2007, la production annuelle de déchets par Français a **diminué de 0,338 tonne (soit 338 kg)**.

2) Pour continuer à diminuer leur production de déchets, de nombreuses familles utilisent désormais un composteur.
Une de ces familles a choisi le modèle ci-dessous, composé d'un pavé droit et d'un prisme droit (la figure du composteur n'est pas à l'échelle). Le descriptif indique qu'il a une contenance d'environ 0,5 m^3. On souhaite vérifier cette information.





a. Dans le trapèze $ABCD$, calculer la longueur CH.

Comme C, H et B sont alignés, on a : $CH = CB - HB = 67 - 39 = 28$ cm.
La longueur CH est égale à 28 cm.

b. Montrer que la longueur DH est égale à 45 cm.

Le triangle CHD est **rectangle en H.**
Le triangle CHD est **rectangle en H**, donc d'après le **théorème de Pythagore** :

$$\begin{aligned} CD^2 &= CH^2 + HD^2 \\ 53^2 &= 28^2 + HD^2 \\ 2\,809 &= 784 + HD^2 \\ HD^2 &= 2\,809 - 784 = 2\,025 \\ HD &= \sqrt{2\,025} = \mathbf{45 \text{ cm}} \end{aligned}$$

On a bien HD = 45 cm.

L'exercice continue en page 13.

c. Vérifier que l'aire du trapèze $ABCD$ est de 2 385 cm^2.

Avec la fomule fournie :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(39+67)\times 45}{2} = 2\ 385 \text{ cm}^2 = 0,238\ 5 \text{ m}^2$$

Par somme :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABHD} + \mathcal{A}_{CDH} = 39\times 45 + \frac{28\times 45}{2} = 1\ 755 + 630 = 2\ 385 \text{ cm}^2 = 0,238\ 5 \text{ m}^2$$

L'aire du trapèze ABCD est bien de 2 385 cm^2.

d. Calculer le volume du composteur.
L'affirmation « il a une contenance d'environ $0,5$ m^3 » est-elle vraie ? Justifier.

Le composteur est un prisme dont la base est le côté droit, composé du trapèze $ABCD$ et d'un rectangle de longueur 67 cm et de largeur : $1,1 \text{ m} - 45 \text{ cm} = 110 \text{ cm} - 45 \text{ cm} = 65 \text{ cm}$.

L'aire de ce rectangle est donc $\mathcal{A}_{\text{rectangle}} = 67 \text{ cm} \times 65 \text{ cm} = 4\ 355 \text{ cm}^2$.

L'aire de la base du prise est donc :

$$\mathcal{A}_{\text{base}} = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{\text{rectangle}} = 2\ 385 \text{ cm}^2 + 4\ 355 \text{ cm}^2 = 6\ 740 \text{ cm}^2$$

Au final le volume du composteur est donc :

$$\mathcal{V}_{\text{composteur}} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times \text{hauteur} = 6\ 740 \text{ cm}^2 \times 70 \text{ cm} = 471\ 800 \text{ cm}^3 = \mathbf{0,471\ 8\ cm^3}$$

L'affirmation est donc vraie : le composteur a un volume proche de $0,5$ cm^3 (légèrement inférieur).

Rappels :

$$\text{Aire du trapèze} = \frac{(\text{Petit côté} + \text{Grand côté}) \times \text{Hauteur}}{2}$$

$$\text{Volume du prisme droit} = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$\text{Volume du pavé droit} = \text{Longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

Brouillon