Séquence 4

✐ ✎ ✐ Leçon n°1 - Géométrie : Trigonométrie ✎ ✐ ✎

Notions à **connaître** :	Page(s) :
Les différents côtés d'un triangle rectangle	2
Les formules de sinus, cosinus et tangente	2
La méthode pour calculer une longueur avec la trigonométrie	4

❏ Trace écrite : **Carte mentale n°5 : « Trigonométrie »**, parties « Côtés d'un triangle » et « Calculer une longueur ».

Code	**Automatismes** à maîtriser :	Exercices :	Page(s) :
G03	❏ Reconnaître les différentes longueurs d'un triangle rectangle	1 à 3	3
G04	❏ Calculer la longueur d'un côté avec la trigonométrie	4 à 8	4 à 6

✐ ✎ ✐ Leçon n°2 - Nombres et calcul : Calcul littéral ✎ ✐ ✎

Notions à **connaître** :	Page(s) :
Formules de distributivité simple	7
Formule de distributivité double	7

❏ Trace écrite : **Carte mentale n°4 : « Calcul littéral »**, partie « Distributivité ».

Code	**Automatismes** à maîtriser :	Exercices :	Page(s) :
N11	❏ Utiliser la distributivité simple	9 à 14	8
N12	❏ Utiliser la distributivité double	15 à 16	9
N13	❏ *(Approfondissement) Utiliser les identités remarquables pour distribuer*	17	9

✐ ✎ ✐ Leçon n°3 - Données : Statistiques ✎ ✐ ✎

Notions à **connaître** :	Page(s) :
Les définitions d'**effectif** et de **fréquence**	11
La formule de calcul d'une fréquence	11
La propriété sur la somme des fréquences	11
La formule de calcul d'une moyenne simple	11

❏ Trace écrite : **Carte mentale n°6 : « Statistiques »**, parties « Fréquences » et « Moyennes ».

Code	**Automatismes** à maîtriser :	Exercices :	Page(s) :
D06	❏ Compléter un tableau de fréquences	18 à 22	12 à 13
D07	❏ Calculer une moyenne simple	23 à 25	14

✐ ✎ ✐ Mais aussi... ✎ ✐ ✎

❏ Tâche complexe : Carrés bordés . . . . Page(s) 10

❏ Vers le DNB : n°2 Polynésie Juin 2011 + n°7 Métropole Septembre 2018 . . . . Page(s) 15-16

✐ ✎ ✐ Automatismes à réviser : ✎ ✐ ✎

❏ N10 : Traduire un programme de calcul par une expression littérale . . . . Voir séquence 3

❏ G01 : Pythagore sens direct pour calculer une longueur . . . . Voir séquence 1

❏ D05 : Calculer une augmentation ou une réduction . . . . Voir séquence 3

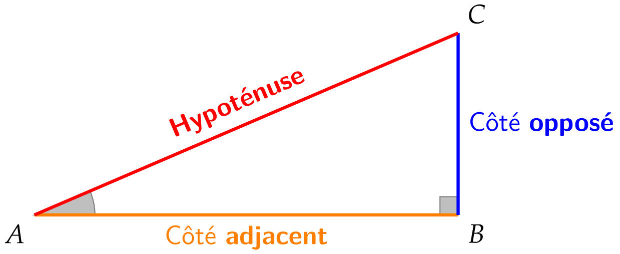
Leçon n°1 : Trigonométrie

A) Résumé de l'introduction de la séquence précédente...

☞ Dans un triangle rectangle (ou un escalier), il y a un lien entre **la tangente (la pente)** et **l'angle** formés par ce triangle (cet escalier).

❧ **Définition 1 : Vocabulaire du triangle rectangle**

Dans un triangle rectangle, si on considère un des deux angles aigus (ici l'angle $\widehat{BAC}$), on peut alors nommer l'ensemble des côtés du triangle ainsi :



☞ On calcule la **tangente** d'un angle avec la formule : $\dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

☞ Sur la calculatrice :

- ☛ La touche **tan** permet de passer de **la mesure de l'angle** à **la valeur de la tangente** ;
- ☛ La touche **arctan** ou **tan**$^{-1}$ permet de faire le contraire.

☞ Question : Que peut-on faire si on a une **autre paire de valeurs** (par exemple *hypoténuse* et *côté opposé*) ?

B) Sinus, cosinus et tangente

❧ **Définition 2 : Les formules de trigonométrie**

Dans un triangle rectangle :

- ☞ Le **sinus** d'un angle aigu est le quotient : $\dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$ $\left(S = \dfrac{O}{H}\right)$
- ☞ Le **cosinus** d'un angle aigu est le quotient : $\dfrac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$ $\left(C = \dfrac{A}{H}\right)$
- ☞ La **tangente** d'un angle aigu est le quotient : $\dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$ $\left(T = \dfrac{O}{A}\right)$

Moyen mnémotechnique :

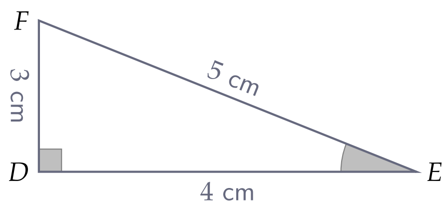
SOH – CAH – TOA

ou

CAH – SOH – TOA

Remarques importantes : Ces trois quotients ne dépendent que de la valeur de l'angle considéré !
Et **sinus** et **cosinus** sont toujours compris **entre 0 et 1**.

☞ **Exemple(s) :**



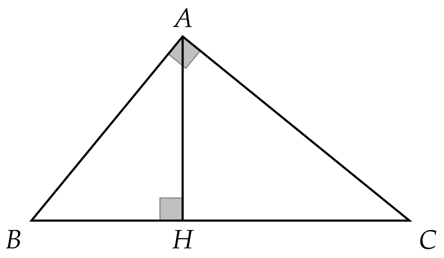
☞ $\sin(\widehat{DEF}) = \dfrac{O}{H} = \dfrac{DF}{EF} = \dfrac{3}{5} = \mathbf{0,6}$

☞ $\cos(\widehat{DEF}) = \dfrac{A}{H} = \dfrac{DE}{EF} = \dfrac{4}{5} = \mathbf{0,8}$

☞ $\tan(\widehat{DEF}) = \dfrac{O}{A} = \dfrac{DF}{DE} = \dfrac{3}{4} = \mathbf{0,75}$

Automatisme G03 : Reconnaître les différentes longueurs d'un triangle rectangle

☞ Exercice 1 :

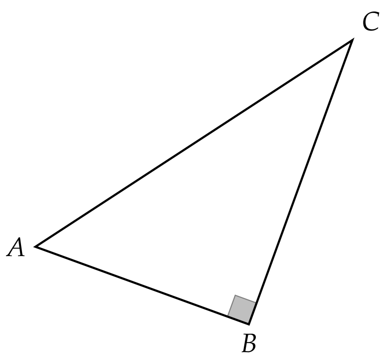


À partir de la figure ci-contre, donner :

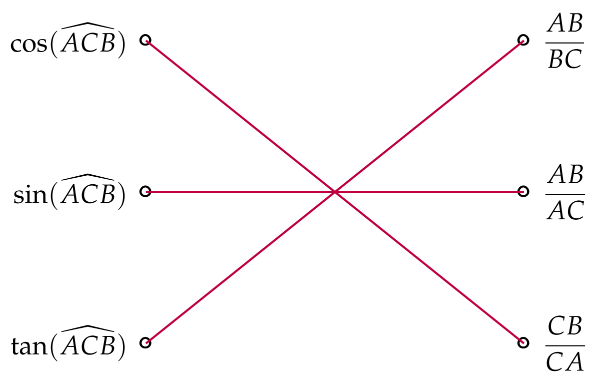
- ☞ Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ABH : **BH**
- ☞ Le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ABH : **AH**
- ☞ L'hypoténuse dans le triangle ABH : **AB**
- ☞ Le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ABC : **AB**
- ☞ Le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ABC : **AC**
- ☞ L'hypoténuse dans le triangle ABC : **BC**

☞ Exercice 2 :

On considère le triangle suivant :

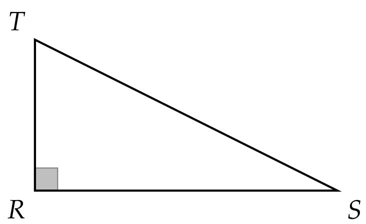


Associer chaque nombre de la colonne de gauche à une fraction :



☞ Exercice 3 :

Dans un triangle RST rectangle en R, est-il vrai que $\sin(\widehat{RTS}) = \cos(\widehat{RST})$? Justifier.



$$\sin(\widehat{RTS}) = \frac{O}{H} = \frac{RS}{TS}$$
$$\cos(\widehat{RST}) = \frac{A}{H} = \frac{RS}{TS}$$

Oui, on a bien $\sin(\widehat{RTS}) = \cos(\widehat{RST})$. On pouvait s'en rendre compte plus simplement en remarquant que quand on considère les 2 angles aigus d'un triangle rectangle, le côté adjacent de l'un est le côté opposé de l'autre, et vice-versa. Donc le cos de l'un est égal au sin de l'autre (et les tangentes sont des inverses).

Automatisme G04 : Calculer la longueur d'un côté avec la trigonométrie

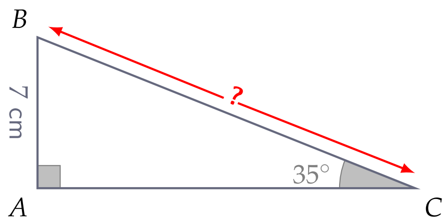
Méthode 1 :

1. Faire un **schéma du triangle** en plaçant dessus toutes les informations connues.
2. Chercher (côté opposé, adjacent ou hypoténuse ?) **le côté connu** et **le côté recherché**.
3. Écrire **le bon rapport** (sinus, cosinus ou tangente ?) qui fait intervenir les deux côtés ciblés.
4. Résoudre l'égalité.

Exemple(s) :

Soit ABC un triangle rectangle en A. On a $AB = 7$ cm et $\widehat{ACB} = 35°$. Calculer CB :

1. Schéma :



2. On connaît **le côté opposé : AB**
On cherche **l'hypoténuse : BC**

3. On utilise donc **le sinus : SOH**

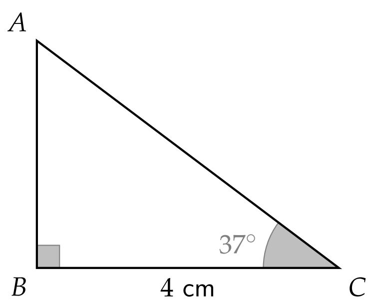
$$\sin(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{BC}$$

4. On résoud :

$$\frac{\sin(35°)}{1} = \frac{7 \text{ cm}}{BC}$$

$$BC = \frac{7 \text{ cm}}{\sin(35°)} \approx \mathbf{12,2 \text{ cm}}$$

Exercice 4 :



1) Dans le triangle ABC rectangle en B ci-contre, calculer la longueur AB. Arrondir le résultat au millimètre.

On connaît BC, **le côté adjacent** et on cherche AB, **le côté opposé**.

On utilise donc **la tangente** (TOA) :

$$\tan(\widehat{BCA}) = \frac{AB}{BC} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\tan(37°)}{1} = \frac{AB}{4 \text{ cm}}$$

$$AB = 4 \times \tan(37°) \approx \mathbf{3,0 \text{ cm}}$$

2) Dans le triangle ABC rectangle en B ci-contre, calculer la longueur AC. Arrondir le résultat au dixième près.

On connaît BC, **le côté adjacent** et on cherche AC, **l'hypoténuse**.

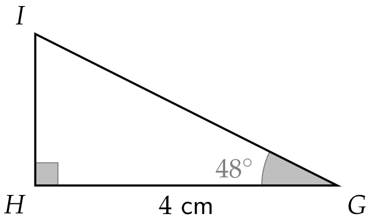
On utilise donc **le cosinus** (CAH) :

$$\cos(\widehat{BCA}) = \frac{BC}{AC} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\cos(37°)}{1} = \frac{4 \text{ cm}}{AC}$$

$$AB = \frac{4}{\cos(37°)} \approx \mathbf{5,0 \text{ cm}}$$

Exercice 5 :

1) Un triangle GHI est rectangle en H tel que $GH = 4$ cm et $\widehat{HGI} = 48°$. Calculer la longueur HI, arrondir au millimètre.

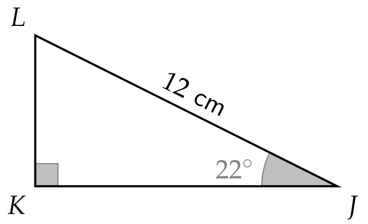


On connaît HG, **le côté adjacent** et on cherche HI, **le côté opposé**.
On utilise donc **la tangente** (TOA) :

$$\tan(\widehat{HGI}) = \frac{HI}{HG} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\tan(48°)}{1} = \frac{HI}{4 \text{ cm}}$$

$$HI = 4 \times \tan(48°) \approx \mathbf{4,4 \text{ cm}}$$

2) Un triangle JKL est rectangle en K tel que $JL = 12$ cm et $\widehat{LJK} = 22°$. Calculer la longueur KL, arrondir au centième.



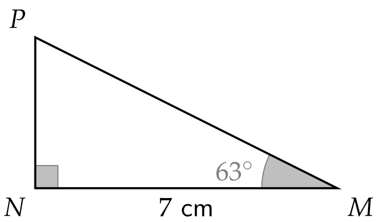
On connaît LJ, **l'hypoténuse** et on cherche KL, **le côté opposé**.
On utilise donc **le sinus** (SOH) :

$$\sin(\widehat{LJK}) = \frac{KL}{LJ} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\sin(22°)}{1} = \frac{KL}{12 \text{ cm}}$$

$$KL = 12 \times \sin(22°) \approx \mathbf{4,50 \text{ cm}}$$

Exercice 6 :

1) Un triangle MNP est rectangle en N tel que $MN = 7$ cm et $\widehat{NMP} = 63°$. Calculer la longueur MP, arrondir au millimètre.



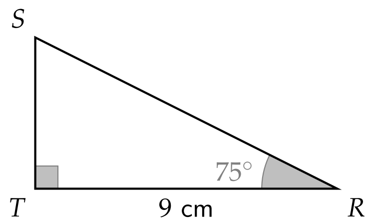
On connaît MN, **le côté adjacent** et on cherche MP, **l'hypoténuse**.
On utilise donc **le cosinus** (CAH) :

$$\cos(\widehat{NMP}) = \frac{MN}{MP} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\cos(63°)}{1} = \frac{7 \text{ cm}}{MP}$$

$$MP = \frac{7}{\cos(63°)} \approx \mathbf{15,4 \text{ cm}}$$

2) Un triangle RST est rectangle en T tel que $RT = 9$ cm et $\widehat{TRS} = 75°$. Calculer toutes les longueurs de ce triangle, arrondir au dixième.

a. On calcule d'abord ST :



On connaît RT, **le côté adjacent** et on cherche ST, **le côté opposé**.
On utilise donc **la tangente** (TOA) :

$$\tan(\widehat{TRS}) = \frac{ST}{TR} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\tan(75°)}{1} = \frac{ST}{9 \text{ cm}}$$

$$ST = 9 \times \tan(75°) \approx \mathbf{33,6 \text{ cm}}$$

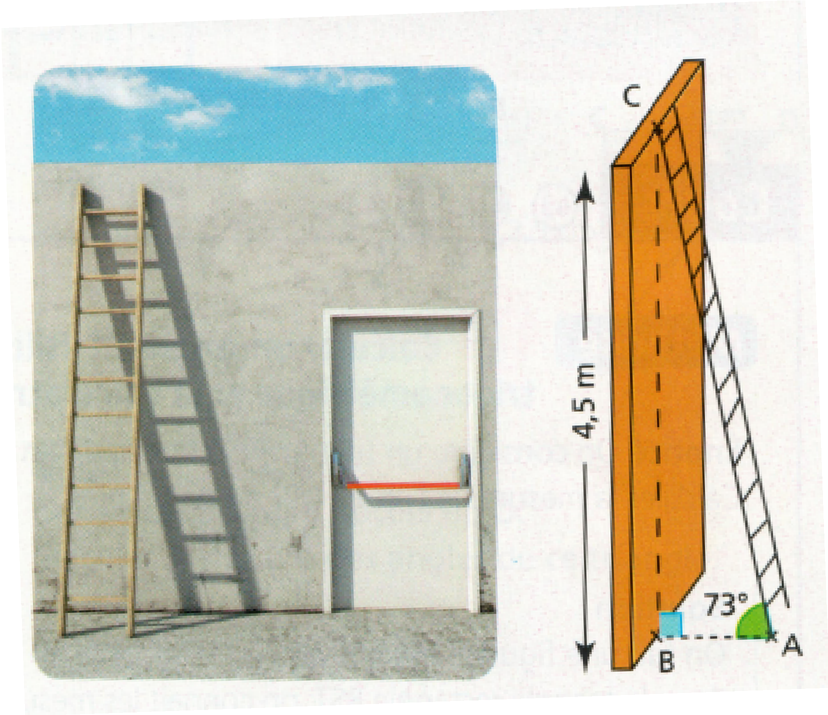
b. On calcule ensuite RS (remarque : on pourrait aussi utilise Pythagore là) :

On connaît RT, **le côté adjacent** et on cherche RS, **l'hypoténuse**.
On utilise donc **le cosinus** (CAH) :

$$\cos(\widehat{TRS}) = \frac{TR}{RS} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\cos(75°)}{1} = \frac{9 \text{ cm}}{RS}$$

$$RS = \frac{9}{\cos(75°)} \approx \mathbf{34,8 \text{ cm}}$$

☞ Exercice 7 :



L'échelle d'un maçon est posée sur un mur de 4,5 m de haut. L'angle entre le sol et l'échelle est de $73°$ comme le montre le schéma.

Calculer la longueur de l'échelle au cm près.

On connaît BC, **le côté opposé**.

On cherche AC, **l'hypoténuse**.

On utilise donc **le sinus** (SOH) :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{donc} \quad \frac{\sin(73°)}{1} = \frac{4,5\text{ m}}{AC}$$

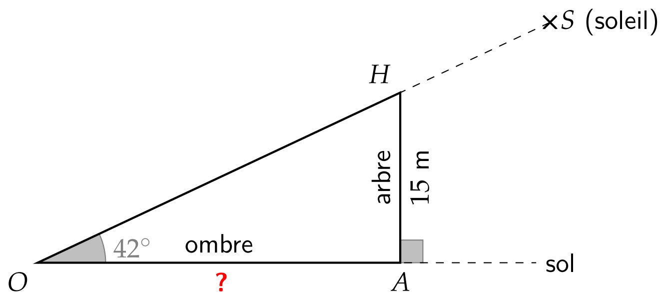
$$AC = \frac{4,5}{\sin(73°)} \approx \mathbf{4,71\ m}$$

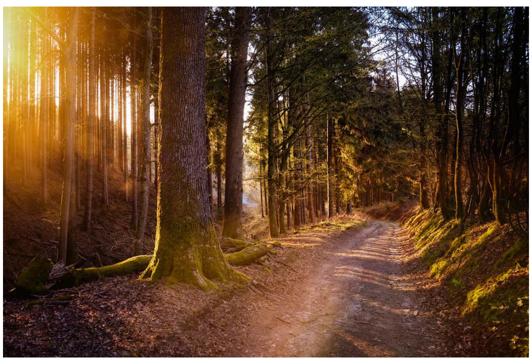
L'échelle mesure donc environ 4,71 m de long.

☞ Exercice 8 :

On cherche à déterminer la longueur de l'ombre d'un arbre de 15 m de haut projetée sur le sol lorsque le Soleil fait un angle de $42°$ avec l'horizontale.

1) Faire une figure à main levée de la situation :





2) Déterminer la longueur de l'ombre projetée. Arrondir à l'unité :

On connaît AH, **le côté opposé** et on cherche OA, **le côté adjacent**.

On utilise donc **la tangente** (TOA) :

$$\tan(\widehat{AOH}) = \frac{AH}{OA} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\tan(42°)}{1} = \frac{15\text{ m}}{OA}$$

$$OA = \frac{15}{\tan(42°)} \approx \mathbf{17\ m}$$

L'ombre projetée mesure donc environ 17 m de long.

Leçon n°2 : Calcul littéral : Distributivité

A) Développer un produit avec la distributivité simple

Définition 1 : Distributivité simple

Développer, c'est transformer un produit ($\times$) et somme ($+$).

Méthode 1 : Utiliser la distributivité simple

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \qquad k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Exemple(s) :

Développer puis **réduire** les expressions ci-dessous :

$H = 4(x+y)$	$I = 7(x+3)$	$J = 2(3y+5)$	$K = t(3t-9)$
$H = 4x + 4y$	$I = 7x + 7 \times 3$	$J = 2 \times 3y + 2 \times 5$	$K = t \times 3t - t \times 9$
	$I = 7x + 21$	$J = 6y + 10$	$K = 3t^2 - 9t$

B) Développer un produit avec la double distributivité

Propriété 1 : Double distributivité

$$(a+b) \times (c+d) = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d$$

Exemple(s) :

Développer puis **réduire** des expressions ci-dessous :

$L = (x+3)(2+y)$	$M = (2x+3)(x+8)$	$N = (x+5)(x-2)$
$L = 2x + xy + 3 \times 2 + 3y$	$M = 2x \times x + 2x \times 8 + 3 \times x + 3 \times 8$	$N = x^2 + 2 \times (-2) + 5x + 5 \times (-2)$
$L = 2x + xy + 6 + 3y$	$M = 2x^2 + 16x + 3x + 24$	$N = x^2 - 2x + 5x - 10$
	$M = 2x^2 + 19x + 24$	$N = x^2 + 3x - 10$

Propriété 2 : Cas particulier

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Démonstration :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - a\,b + a\,b - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

❑

Exemple(s) :

Développer puis **réduire** des expressions ci-dessous :

$O = (x+3)(x-3)$	$P = (2x+y)(2x-y)$
$O = x^2 - 3^2$	$P = (2x)^2 - y^2$
$O = x^2 - 9$	$P = 4x^2 - y^2$

Automatisme N11 : Utiliser la distributivité simple

Exercice 9 :

Associer chaque expression à son écriture développée et réduite :

$-4(y+3)+7y$	$3y^2+16y$
$11y+9+6(7-y)$	$19y^2+5y+1$
$5y^2-2y(y-8)$	$3y-12$
$y^2+2y+1+3y(6y+1)$	$5y+51$

Exercice 10 :

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $A=-3(x+7)=\mathbf{-3x+(-3)\times 7=-3x-21}$

2) $B=4(2x-3)=\mathbf{8x-12}$

3) $C=-11(-x-5)=\mathbf{11x+55}$

4) $D=x(2x+9)=\mathbf{2x^2+9x}$

5) $E=-3x(6+4x)=\mathbf{-18x-12x^2}$

Exercice 11 :

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $F=-2x(10-5x)=\mathbf{-20x+10x^2}$

2) $G=3(5+x)=\mathbf{15+3x}$

3) $H=7(x-8)=\mathbf{7x-56}$

4) $I=10(y+9)=\mathbf{10y+90}$

5) $J=x(6-x)=\mathbf{6x-x^2}$

Exercice 12 :

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $10(4+3x)=\mathbf{40+30x}$

2) $x(17-2x)=\mathbf{17x-2x^2}$

3) $8(1,5+x+6y)=\mathbf{12+8x+48y}$

4) $(x-y)\times 5=\mathbf{5x-5y}$

Exercice 13 :

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $-x(10-2y)=\mathbf{-10x+2xy}$

2) $8y(-3+0,5x)=\mathbf{-24y+4xy}$

3) $5x-3(x+12)=\mathbf{5x-3x-36}$

$=\mathbf{2x-36}$

Exercice 14 :

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

1) $A=3x-6+7(2x+4)=\mathbf{3x-6+14x+28=17x+22}$

2) $B=2x^2+x(4x-5)=\mathbf{2x^2+4x^2-5x=6x^2-5x}$

3) $C=4x^2-x+x(5x-9)=\mathbf{4x^2-x+5x^2-9x=9x^2-10x}$

4) $D=5(a+2)-(6a-7)=\mathbf{5a+10-6a+7=-a+17}$

5) $E=-b(3b+7)+(5-b)\times b=\mathbf{-3b^2-7b+5b-b^2=-4b^2-2b}$

6) $F=-c(4+3c)-(9-2c+6c^2)=\mathbf{-4c-3c^2-9+2c-6c^2=-9c^2-2c-9}$

7) $G=-5d+5d(d-2)-6(7-3d)=\mathbf{-5d+5d^2-10d-42+18d=5d^2+3d-42}$

Automatisme N12 : Utiliser la distributivité double

☞ Exercice 15 :

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

$A = (2+x)(15-y) = \mathbf{30 - 2y + 15x - xy}$

$A = \mathbf{-xy + 15x - 2y + 30}$

$B = (7+y)(y-4) = \mathbf{7y - 28 + y^2 - 4y}$

$B = \mathbf{y^2 + 3y - 28}$

$C = (z-25)(x+z) = \mathbf{xz + z^2 - 25x - 25z}$

$C = \mathbf{z^2 + xz - 25x - 25z}$

$D = (t-3)(t-13) = \mathbf{t^2 - 13t - 3t + 39}$

$D = \mathbf{t^2 - 16t + 39}$

$E = (x+3)(x+2) = \mathbf{x^2 + 2x + 3x + 6}$

$E = \mathbf{x^2 + 5x + 6}$

$F = (x-7)(x+9) = \mathbf{x^2 + 9x - 7x - 63}$

$F = \mathbf{x^2 + 2x - 63}$

$G = (x-3)(4-x) = \mathbf{4x - x^2 - 12 + 3x}$

$G = \mathbf{-x^2 + 7x - 12}$

$H = (3x+4)(5x-7) = \mathbf{15x^2 - 21x + 20x - 28}$

$H = \mathbf{15x^2 - x - 28}$

$I = (k+4)(k-4) = \mathbf{k^2 + 4k - 4k - 16}$

$I = \mathbf{k^2 - 16}$

☞ Exercice 16 :

Développer et **réduire** les expressions suivantes :

$A = (x+5)(10+7x) = \mathbf{10x + 7x^2 + 50 + 35x}$

$A = \mathbf{7x^2 + 45x + 50}$

$B = (5-9x)(2x+8) = \mathbf{10x + 40 - 18x^2 - 72x}$

$B = \mathbf{-18x^2 - 62x + 40}$

$C = (9-3y)(6-5y) = \mathbf{54 - 45y - 18y + 15y^2}$

$C = \mathbf{15y^2 - 63y + 54}$

$D = (2x-3)(7-x) = \mathbf{14x - 2x^2 - 21 + 3x}$

$D = \mathbf{-2x^2 + 17x - 21}$

$E = (x+y)(2x-y) = \mathbf{2x^2 - xy + 2xy - y^2}$

$E = \mathbf{2x^2 + xy - y^2}$

$F = (x-7)(2+y) = \mathbf{2x + xy - 14 - 7y}$

$F = \mathbf{2x - 7y + xy - 14}$

$G = (x-1)(1-x) = \mathbf{x - x^2 - 1 + x}$

$G = \mathbf{x^2 + 2x - 1}$

$H = 3(3a+4)^2 = \mathbf{3(3a+4)(3a+4)}$

$H = \mathbf{3(9a^2 + 12a + 12a + 16)}$

$H = \mathbf{3(9a^2 + 24a + 16)}$

$H = \mathbf{27a^2 + 72a + 48}$

Automatisme N13 : Utiliser les identités remarquables pour distribuer

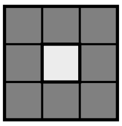
☞ Exercice 17 :

Développer les expressions suivantes en donnant directement le résultat :

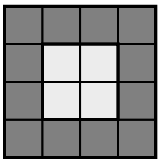
$A = (2a-9)(2a+9)$	$B = (2z-8)(2z+8)$	$C = (4z-3)(4z+3)$	$D = (8y-1)(8y+1)$
$A = \mathbf{4a^2 - 81}$	$B = \mathbf{4z^2 - 64}$	$C = \mathbf{16z^2 - 9}$	$D = \mathbf{64y^2 - 1}$
$E = (4-6a^2)(4+6a^2)$	$F = (3b^3-2)(3b^3+2)$	$G = (9-x)(9+x)$	$A = (y^2-5)(y^2+5)$
$E = \mathbf{16 - 36a^4}$	$F = \mathbf{9b^6 - 4}$	$G = \mathbf{81 - x^2}$	$A = \mathbf{y^4 - 25}$

Tâche complexe : Carrés bordés

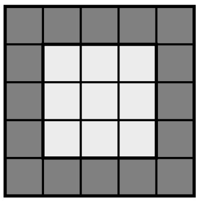
Pierre joue avec des carreaux de mosaïque. Il dispose ses carreaux gris autour de différents carrés formés de carreaux blancs. En voivi quatre :



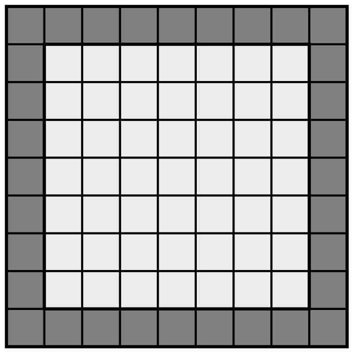
Carré **Taille 1**



Carré **Taille 2**



Carré **Taille 3**



Carré **Taille 7**

1) Combien y a-t-il de carreaux gris entourant le carré **Taille 1** ? Celui **Taille 2** ? Celui **Taille 3** ?

- ☞ Carré **Taille 1** : 8 carreaux gris ;
- ☞ Carré **Taille 2** : 12 carreaux gris ;
- ☞ Carré **Taille 3** : 16 carreaux gris.

2) Trouver un calcul qui donne le nombre de carreaux gris entourant le carré **Taille 7**, puis de **Taille 56** :

- ☞ Carré **Taille 7** : 32 carreaux gris ;
- ☞ Carré **Taille 56** : 228 carreaux gris.

3) Chercher une formule qui permet de connaître le nombre de carreaux gris à partir de la taille du carré blanc :

Exemples de formules possibles (n désigne la taille du carré blanc et N le nombre de carreaux gris qui l'entourent) :

- ☞ $N = 4n + 4$;
- ☞ $N = 2n + 2(n + 2)$;
- ☞ $N = 2(n + 1) + n + n + 2$;
- ☞ $N = (n + 2)^2 - n^2$.

4) Note les autres réponses proposées dans la classe, et démontre qu'elles reviennent au même :

Distribuer, simplifier et réduire les différentes formules.

Leçon n°3 : Statistiques : Fréquences et moyennes

A) Fréquences

Définition 1 : Effectif

L'effectif d'une valeur est le nombre de fois où elle apparaît dans la liste. L'effectif total est la somme des effectifs.

Définition 2 : Fréquence

La fréquence f d'une valeur est un **nombre compris entre 0 et 1** qui mesure la proportion de cette valeur dans l'effectif total :

$$f = \frac{\text{Effectif de la valeur}}{\text{Effectif total}}$$

On préfère souvent donner la fréquence en pourcentage (en multipliant par 100).

Propriété 1 : Somme des fréquences

La somme de toutes les fréquences est égale à 1.

Exemple(s) :

Dans une classe, on a demandé aux élèves leur couleur préférée, et voici les résultats :

❄ jaune ❄ vert ❄ rouge ❄ vert ❄ noir ❄ bleu ❄ bleu ❄ noir ❄ jaune ❄
❄ vert ❄ noir ❄ rose ❄ bleu ❄ jaune ❄ jaune ❄ noir ❄ rose ❄
❄ noir ❄ jaune ❄ bleu ❄ jaune ❄ jaune ❄ jaune ❄ rose ❄ rose ❄

Remplis le tableau ci-dessous :

Couleur	BLEU	VERT	ROUGE	JAUNE	ROSE	NOIR	**Total**
Effectif	4	3	1	8	4	5	**25**
Fréquence	$\frac{4}{25} = 0,16$	$\frac{3}{25} = 0,12$	$\frac{1}{25} = 0,04$	$\frac{8}{25} = 0,32$	$\frac{4}{25} = 0,16$	$\frac{5}{25} = 0,2$	**1**
Fréquence (en %)	$0,16 \times 100 =$ 16	$0,12 \times 100 =$ 12	$0,04 \times 100 =$ 4	$0,32 \times 100 =$ 32	$0,16 \times 100 =$ 16	$0,2 \times 100 =$ 20	**100**

B) Moyenne simple

Propriété 2 : Moyenne simple

$$\text{Moyenne simple} = \frac{\text{Somme des valeurs}}{\text{Effectif total}}$$

Exemple(s) :

Voici les prix des bijoux portés par Marina : 12,5 € - 25 € - 30 € - 8 € - 52 €.
Quel est le prix moyen de ses bijoux ?

$$\text{Prix moyen} = \frac{12,5+25+30+8+52}{5} = \frac{127,5}{5} = 25,5$$

Le prix moyen des bijoux portés par Marina est de **25,5 €**.

Automatisme D06 : Compléter un tableau de fréquences

Exercice 18 :

Les élèves d'une classe sont répartis de la façon suivante :

Sexe	Filles	Garçons
Effectif	16	9

1) Calculer la fréquence des filles dans la classe.

$$f = \frac{16}{16+9} = \frac{16}{25} = 0,64$$

La fréquence de filles dans la classe est de **0,64**.

2) **En déduire** celle des garçons.

On sait que la somme des fréquences vaut toujours 1.
On doit donc avoir : $f_{\text{filles}} + f_{\text{garçons}} = 1$, et donc $0,64 + f_{\text{garçons}} = 1$.
On a donc $f_{\text{garçons}} = 1 - 0,64 = 0,36$ La fréquence de garçons dans la classe est de **0,36**.

Exercice 19 :

Dans un magazine on lit les données suivantes :

Destination préférée	Mer	Montagne	Campagne
Effectif	636	264	300

1) Calculer la fréquence de personnes préférant :

a. partir à la mer.

$$f = \frac{636}{636+264+300} = \frac{636}{1\ 200} = 0,53$$

La fréquence de personnes préférant partir à la mer est de **0,53**.

b. partir à la montagne.

$$f = \frac{264}{636+264+300} = \frac{264}{1\ 200} = 0,22$$

La fréquence de personnes préférant partir à la montagne est de **0,22**.

2) **En déduire** celle des personnes préférant partir à la campagne.

On sait que la somme des fréquences vaut toujours 1.
On doit donc avoir : $f_{\text{mer}} + f_{\text{montagne}} + f_{\text{campagne}} = 1$, et donc $0,53 + 0,22 + f_{\text{campagne}} = 1$.
On a donc $f_{\text{campagne}} = 1 - (0,53 + 0,22) = 1 - 0,75 = 0,25$ La fréquence de personnes préférant partir à la campagne est de **0,25**.

Exercice 20 :

1) Dans une classe, on a fait un sondage pour connaître la matière préférée de chaque élève. Complète le tableau suivant :

MATIÈRE	Maths	Français	Histoire-Géo	SVT	P-C	Anglais	Espagnol	Arts Pla.	EPS	Musique	TOTAL
Effectif	6	3	1	2	0	4	5	1	2	1	**25**
Fréq. (0-1)	0,24	0,12	0,04	0,08	0	0,16	0,2	0,04	0,08	0,04	1
Fréq. (%)	24	12	4	8	0	16	20	4	8	4	100

⚠L'exercice continue en p.6 ! ⚠

2) Dans une entreprise, la fréquence de femmes est de 0,56.
a. Quelle est la fréquence d'hommes ?

On sait que la somme des fréquences vaut toujours 1.
On doit donc avoir : $f_{\text{femmes}} + f_{\text{hommes}} = 1$, et donc $0,56 + f_{\text{hommes}} = 1$.
On a donc $f_{\text{hommes}} = 1 - 0,56 = 0,44$ La fréquence d'hommes dans cette entreprise est de **0,44**.

b. S'il y a en tout 250 employés dans cette entreprise, combien sont des femmes ?

On sait que la fréquence de femmes dans cette entreprise est 0,56. Il y a donc 56 % de femmes.

$$56\% \text{ de } 250 = \frac{56}{100} \times 250 = 140$$

Il y a donc 140 femmes dans cette entreprise.

Exercice 21 :

1) Voici la liste des notes d'une classe de 20 élèves :

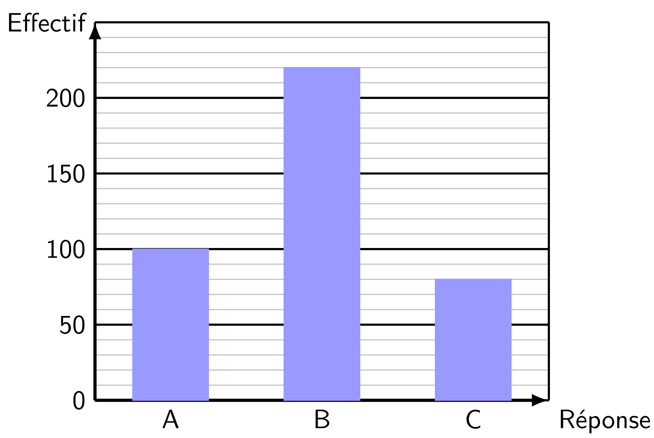
$$6; 16; 18; 19; 11; 14; 19; 13; 14; 14; 6; 19; 14; 17; 16; 17; 11; 12; 20; 18$$

Compléter le tableau ci-dessous :

Notes	6	11	12	13	14	16	17	18	19	20	Total
Effectifs	2	2	1	1	4	2	2	2	3	1	20
Fréquences	0,1	0,1	0,05	0,05	0,2	0,1	0,1	0,1	0,15	0,05	1
Fréquences en %	10 %	10 %	5 %	5 %	20 %	10 %	10 %	10 %	15 %	5 %	100 %

Exercice 22 :

Au cours d'un jeu télévisé, le public répond à une question à choix multiple de la façon suivante :



1) Quelle est la fréquence de la réponse A exprimée en écriture décimale ?

$$f_A = \frac{100}{100+220+80} = \frac{100}{400} = \mathbf{0,25}$$

2) Quelle est la fréquence de la réponse B exprimée sous forme fractionnaire ?

$$f_B = \frac{220}{100+220+80} = \mathbf{\frac{220}{400}} = \mathbf{\frac{55}{100}} = \mathbf{\frac{11}{20}}$$

3) Quelle est la fréquence de la réponse C exprimée en pourcentage ?

$$f_C = \frac{80}{100+220+80} = \frac{80}{400} = 0,2 = \mathbf{20}\ \%$$

Automatisme D07 : Calculer une moyenne simple

Exercice 23 :

Voici les tailles des sœurs d'une même famille :

175 cm	123 cm	155 cm	159 cm

Quelle est la moyenne de leurs tailles ?

$$\text{Moyenne} = \frac{175+123+155+159}{4} = \frac{612}{4} = 153$$

La taille moyenne des sœurs de cette famille est de **153 cm**.

Exercice 24 :

Pour s'habiller, Tom a mis un jean à 25 €, un t-shirt à 7 €, un pull à 32 €, un bonnet à 13 € et des chaussures à 74 €. Quelle est la moyenne des prix des habits qui composent sa tenue ?

$$\text{Moyenne} = \frac{25+7+32+13+74}{5} = \frac{151}{5} = 30,2$$

Les habits qui composent la tenue de Tom coûtent en moyenne **30,20 €**.

Exercice 25 :

1) En septembre 1992, à Paris, on a relevé les températures suivantes (voir tableau ci-dessous). Calculer la moyenne des températures arrondie au dixième.

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Température en°C	20	22	23	24	22	22	21	21	21	22	23	25	23	21	22

Jour	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Température en°C	20	22	22	21	20	18	19	21	19	17	15	15	16	17	19

$$\text{Moyenne} = \frac{20+22+23+\ldots+16+17+19}{30} = \frac{613}{30}$$

La somme des températures est : 613.
Il y a 30 températures.
Donc **la moyenne des températures est** $\mathbf{\frac{613}{30}} \approx$ **20,4** °C.

2) Karim a obtenu ces notes ce trimestre-ci en mathématiques :
13 ; 17 ; 10 ; 5 ; 4 ; 8 ; 9 et 3.
Calculer la moyenne de ces notes arrondie au dixième.

$$\text{Moyenne} = \frac{13+17+10+5+4+8+9+3}{8} = \frac{69}{8} = 8,625 \approx \mathbf{8,6}$$

Donc **la moyenne des notes est d'environ** $\mathbf{8,6}$.

Vers le DNB

☞ **Exercice 26** - ***d'après Polynésie Juin 2011 (exercice n°2)*** :

Voici, pour la production de l'année 2009, le relevé des longueurs des gousses de vanille d'un cultivateur de Tahaa :

Longueur en cm	12	15	17	22	23
Effectif	600	800	1 800	1 200	600

1) Quel est l'effectif de cette production ?

$600 + 800 + 1\ 800 + 1\ 200 + 600 = 5\ 000$

Il a produit 5 000 gousses de vanille.

2) Le cultivateur peut seulement les conditionner dans des tubes de 20 cm de long. Quel pourcentage de cette production a-t-il pu conditionner sans plier les gousses ?

Il y a $600 + 800 + 1\ 800 =$ **3 200** gousses qui font moins de 20 cm :

Non pliées	3 200	x
Total	5 000	100

$x = \dfrac{3\ 200 \times 100}{5\ 000} = 64$, il a donc pu mettre **64 % des gousses sans les plier**.

3) La chambre d'agriculture décerne une récompense (un « label de qualité ») aux agriculteurs si :

☞ la longueur moyenne des gousses de leur production est supérieure ou égale à $16,5$ cm ;

☞ et plus de la moitié des gousses de leur production a une taille supérieure à $17,5$ cm.

Ce cultivateur pourra-t-il recevoir ce « label de qualité » ?

Il n'a que $1\ 200 + 600 = 1\ 800$ de gousses dépassant $17,5$ cm, soit moins de la moitié. Il ne satisfait donc pas le deuxième critère et **n'aura pas le label**.

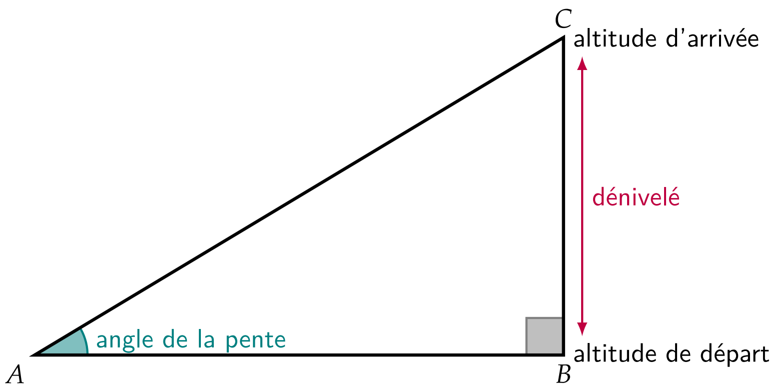
☞ **Exercice 27** - ***d'après Métropole Septembre 2018 (exercice n°7 - 12 points)*** :

Pour la course à pied en montagne, certains sportifs mesurent leur performance par la **vitesse ascensionnelle**, notée V_a.

V_a est le quotient du dénivelé de la course, exprimé en mètres, par la durée, exprimée en heure.

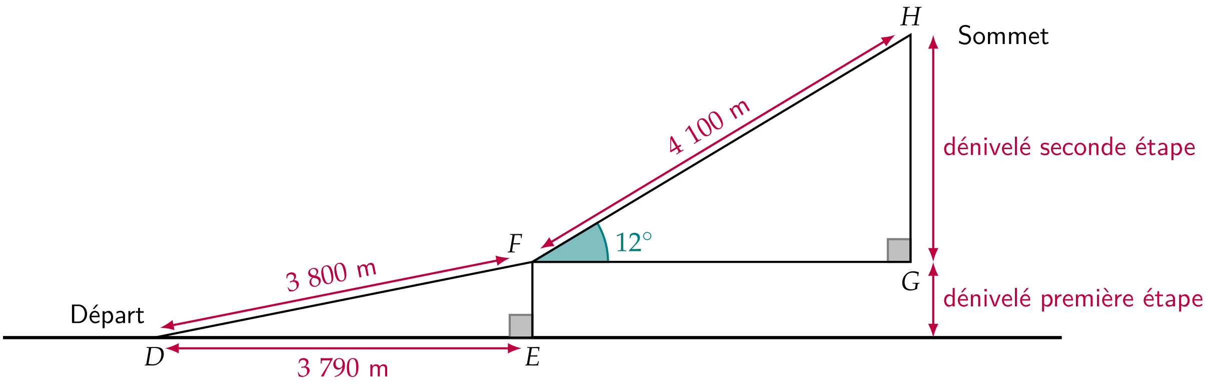
Par exemple : pour un dénivelé de 4 500 m et une durée de parcours de 3 h : $V_a = 1\ 500$ m/h.

Rappel : le dénivelé de la course est la différence entre l'altitude à l'arrivée et l'altitude au départ.



Un coureur de haut niveau souhaite atteindre une vitesse ascensionnelle d'au moins 1 400 m/h lors de sa prochaine course.

La figure ci-dessous n'est pas représentée en vraie grandeur.



Le parcours se décompose en deux étapes :

☞ Première étape de 3 800 m pour un déplacement horizontal de 3 790 m ;

☞ Seconde étape de $4,1$ km avec un angle de pente d'environ $12°$.

1) Vérifier que le dénivelé de la première étape est environ $275,5$ m.

Le triangle DEF est rectangle en E, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$DF^2 = DE^2 + EF^2$$

$$3\ 800^2 = 3\ 790^2 + EF^2$$

$$14\ 440\ 000 = 14\ 364\ 100 + EF^2$$

$$EF^2 = 14\ 440\ 000 - 14\ 364\ 100 = 75\ 900$$

$$EF = \sqrt{75\ 900} \approx \mathbf{275,5\ m}$$

On obtient bien le résultat recherché.

2) Quel est le dénivelé de la seconde étape ?

Dans le triangle FGH rectangle en G :

☞ On connaît l'**hypoténuse** FH ;

☞ On cherche le **côté opposé** GH ;

On utilise donc le **sinus** :

$$\sin\left(\widehat{GFH}\right) = \frac{GH}{FH} \quad \text{soit} \quad \frac{\sin(12°)}{1} = \frac{GH}{4\ 100}$$

D'où $GH = 4\ 100 \times \sin(12°) \approx \mathbf{852,4}$ m environ.

3) Depuis le départ, le coureur met 48 min pour arriver au sommet. A-t-il atteint son objectif ?

Le dénivelé total est donc de $275,5 + 852,4 = 1\ 127,9$ m pour un temps de 48 min $= \dfrac{48}{60} = 0,8$ h.

La vitesse ascensionnelle est donc de :

$$V_a = \frac{1\ 127,9}{0,8} \approx \mathbf{1\ 409,9\ m/h} > 1\ 400\ \text{m/h}$$

Le coureur a bien atteint son objectif.