Séquence 6

✐ ✎ ✐ Leçon n°1 - Nombres et calculs : Équations du premier degré ✎ ✐ ✎

Notions à **connaître** :	Page(s) :
Le vocabulaire des équations	3
Les méthodes de résolution d'une équation du premier degré	3 à 4

❏ Trace écrite : **Carte mentale n°7 : « Équations »**, partie « Premier degré ».

Code	**Automatismes** à maîtriser :	Exercices :	Page(s) :
N17	❏ Résoudre les équations de la forme « $ax + b = c$ »	3 à 7	5 à 6
N18	❏ Résoudre les équations du premier degré en général	8 à 12	6 à 7

✐ ✎ ✐ Leçon n°2 - Géométrie : En route vers Thalès... Les triangles semblables ✎ ✐ ✎

Notions à **connaître** :	Page(s) :
La propriété sur la somme des angles d'un triangle	8
Les **deux caractérisations** des triangles semblables	8
La méthode pour trouver une longueur avec les triangles semblables	9

❏ Trace écrite : **Carte mentale n°8 : « Triangles semblables »**, parties « Angler manquant » et « Calculer une longueur ».

Code	**Automatismes** à maîtriser :	Exercices :	Page(s) :
G06	❏ Calculer l'angle manquant dans un triangle	13 à 14	10
G07	❏ Calculer une longueur dans les triangles semblables	15 à 18	10 à 11

✐ ✎ ✐ Leçon n°3 - Fonctions : Vocabulaire et calcul d'image ✎ ✐ ✎

Notions à **connaître** :	Page(s) :
Les définitions de « image » et « antécédent »	12
La méthode de calcul d'une image	12

❏ Trace écrite : **Carte mentale n°9 : « Fonctions »**, partie « Vocabulaire ».

Code	**Automatismes** à maîtriser :	Exercices :	Page(s) :
F01	❏ Utiliser le vocabulaire des fonctions (image, antécédent...)	19 à 20	13
F02	❏ Calculer une image	21 à 24	13 à 14

✐ ✎ ✐ Mais aussi... ✎ ✐ ✎

❏ Tâche complexe : Piles de cubes .... Page(s) 2

❏ Vers le DNB : n°7 Pond. Mai 2018 + n°5 Asie Juin 2019 + n°3 N.-C. Décembre 2020 ... Page(s) 15-17

✐ ✎ ✐ Automatismes à réviser : ✎ ✐ ✎

❏ N14 : Factoriser un élément simple .... Voir séquence 5

❏ G05 : Calculer la mesure d'un angle avec la trigonométrie .... Voir séquence 5

❏ D05 : Calculer une augmentation ou une réduction .... Voir séquence 3

Tâche complexe : Piles de cubes

A) Vidéo et questions

Regarde attentivement la vidéo montrée en classe (voir « Les 2 piles de cubes » sur le Google Docs de S. Hélaine, montrer l'acte 1) . **Quelles questions pourrait-on se poser ?**

Voici la question choisie en classe :

2 possibilités :

- ☞ Combien faut-il empiler de cubes de chaque sorte pour que les deux tours aient la même hauteur ?
- ☞ Combien faut-il empiler au minimum de cubes de chaque sorte pour que la tour de droite dépasse celle de gauche ?

De quelles informations as-tu besoin pour répondre à cette question ?

- ☞ Hauteur des livres ($7,8$ cm et $1,6$ cm) ;
- ☞ Hauteurs de chaque type de cube ($2,9$ cm et $3,5$ cm).

Quand les élèves du groupe ont bien listé les données manquantes, leur donner la photo comportant les informations (voir acte 2) nécessaires plastifiée.

B) À vous de jouer !

Vous avez toutes les cartes en main pour répondre à la question posée, au travail ! On fait chauffer le cerveau !

- ☞ *Combien faut-il empiler de cubes de chaque sorte pour que les deux tours aient la même hauteur ?* :

  $10+\dfrac{1}{3}$ de cubes.

- ☞ Combien faut-il empiler au minimum de cubes de chaque sorte pour que la tour de droite dépasse celle de gauche ?

  11èmes cubes.

L'idée est de poser les deux hauteurs sous forme littérale (si n est le nombre de cubes, $7,8+2,9n$ est la hauteur de la pile de gauche ; $1;6+3,5n$ est la hauteur de la pile de droite). La première question revient à résoudre une équation, la seconde à résoudre l'inéquation associée.

On pourra encourager les élèves à utiliser un tableur, Scratch ou GeoGebra.

C) Conclusion

Qu'as-tu appris de cette activité ?

Finir avec la vidéo de l'acte 3 correspondante) la question choisie. On peut aussi montrer la visualisation GeoGebra.

Lister les points travaillés (mise en équation, TICE...). Selon le temps disponible, on pourra aussi étendre les questions possibles (ou y revenir plus tard) :

- ☞ Quelle est alors la hauteur commune aux deux tours ? / Quelle est la hauteur de chacune des deux tours ?
- ☞ Exprimer la hauteur de chacune des tours en fonction du nombre x de cubes empilés.
- ☞ Retrouver graphiquement les résultats que vous avez obtenus.

Leçon n°1 : Équations

A) Vocabulaire et notions de base

Définition 1 : Vocabulaire des équations

- Équation : c'est une égalité comportant au moins un nombre dont la valeur n'est pas connue.
- Inconnue : c'est le nombre que l'on cherche, désigné par une lettre (souvent x).
- Solution : c'est la valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie.
- Résoudre une équation : c'est trouver la (ou les) solution(s) de l'équation.

Remarque : une équation peut avoir plusieurs solutions, ou aucune !

Exemple(s) :

- « $x+1=3$ » est une équation avec **une seule inconnue** (x) et **une seule solution** qui est évidente : $x=2$, car $2+1=3$.
- « $y^2=4$ » est une équation avec **une seule inconnue** (y) mais avec **2 solutions !** En effet, $(-2)^2=4$ ET $2^2=4$

Méthode 1 : Principes généraux de résolution d'une équation

1. Une équation peut être considérée comme **une balance équilibrée** et qui doit **rester équilibrée** : si j'enlève 3 à un membre de l'équation, je dois enlever 3 aussi à l'autre. Si je divise un membre de l'équation par $2,5$, je dois aussi diviser l'autre membre de l'équation par $2,5$...
2. Pour résoudre une équation, on cherche à modifier son écriture (sans déséquilibrer la balance !) pour avoir **uniquement l'inconnue dans un membre de l'équation**, et **uniquement des constantes dans l'autre membre**.

B) Résoudre une équation

1. Équations « directes »

Propriété 1 : Addition et soustraction

Une égalité reste vraie si on **ajoute** ou **soustrait** un **même nombre** à chacun de ses membres :

$$\text{Si } A=B, \text{ alors : } \begin{cases} A+k=B+k \\ A-k=B-k \end{cases}$$

Exemple(s) :

$x+3=7$	$x-5=12$	$x+9=2$	$x-8=-11$	$2x-8=x-4$
$x+3-3=7-3$	$x-5+5=12+5$	$x+9-9=2-9$	$x-8+8=-11+8$	$2x-8+8=x-4+8$
$\mathbf{x=4}$	$\mathbf{x=17}$	$\mathbf{x=-7}$	$\mathbf{x=-3}$	$2x=x+4$
				$2x-x+x=x-4+x$
				$\mathbf{x=4}$

Propriété 2 : Multiplication et division

Une égalité reste vraie si on **multiplie** ou **divise** chacun de ses membres par un **même nombre** (différent de 0 !) :

$$\text{Si } A = B \text{ et } k \neq 0, \text{ alors : } \begin{cases} A \times k = B \times k \\ A \div k = B \div k \end{cases}$$

Exemple(s) :

$x \div 3 = 7$ $x \div 3 \times 3 = 7 \times 3$ $\mathbf{x = 21}$	$x \times 5 = 15$ $x \times 5 \div 5 = 15 \div 5$ $\mathbf{x = 3}$	$\frac{x}{2} = -3$ $\frac{x}{2} \times 2 = -3 \times 2$ $\mathbf{x = -6}$	$6x = 42$ $6x \div 6 = 42 \div 6$ $\mathbf{x = 7}$

Méthode 2 : Résolution des équations « directes »

Pour la plupart des équations, il suffit d'utiliser les deux propriétés ci-dessus, éventuellement plusieurs fois, jusqu'à **isoler la variable** dans un membre de l'égalité, et les constantes dans l'autre.

Pour savoir dans quel ordre effectuer les opérations, il faut **regarder les priorités opératoires** et les *dépiler*.

Exemple(s) :

$3x + 4 = 10$ $3x + 4 - 4 = 10 - 4$ $3x = 6$ $3x \div 3 = 6 \div 3$ $\mathbf{x = 2}$	$5y - 3 = 17$ $5y - 3 + 3 = 17 + 3$ $5y = 20$ $5y \div 5 = 20 \div 5$ $\mathbf{y = 4}$
$7 + \frac{x}{3} = 9$ $7 + \frac{x}{3} - 7 = 9 - 7$ $\frac{x}{3} = 2$ $\frac{x}{3} \times 3 = 2 \times 3$ $\mathbf{x = 6}$	$\frac{2x-5}{4} = 1,5$ $\frac{2x-5}{4} \times 4 = 1,5 \times 4$ $2x - 5 = 6$ $2x - 5 + 5 = 6 + 5$ $2x = 11$ $\mathbf{x} = 11 \div 2 = \mathbf{5,5}$

Exercice 1 :

On considère l'équation $3x-2=2+12$.

1) Quelle est l'inconnue ? ☞ $\mathbf{x}$

2) Que vaut le membre de gauche de cette équation pour $x=7$? ☞ $3\times 7-2=\mathbf{19}$

3) Que vaut le membre de droite de cette équation pour $x=7$? ☞ $7+12=\mathbf{19}$

4) Que peut-on en conclure ?

L'égalité est vraie pour $x=7$, donc 7 est une solution de l'équation.

Exercice 2 :

Vrai ou faux ? Justifie.

1) 10 est une solution de l'équation $2x+1=11$. ❏ VRAI ✔ FAUX ☞ $2\times 10+2=20+1=\mathbf{21}$ et non pas 11.

2) 11 est une solution de l'équation $x^2+1=122$. ✔ VRAI ❏ FAUX ☞ $11^2+1=121+1=\mathbf{122}$.

3) 5 est une solution de l'équation $2x+1=11$. ✔ VRAI ❏ FAUX ☞ $2\times 5+2=10+1=\mathbf{11}$.

4) -11 est une solution de l'équation $x^2+1=122$. ✔ VRAI ❏ FAUX ☞ $(-11)^2+1=121+1=\mathbf{122}$.

Automatisme N17 : Résoudre les équations de la forme « $ax+b=c$ »

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes :

$$x+2=3 \qquad x+2-2=3-2 \qquad \mathbf{x=1}$$

$$x+1=11 \qquad x+1-1=11-1 \qquad \mathbf{x=10}$$

$$y-8=12 \qquad y-8+8=12+8 \qquad \mathbf{y=20}$$

$$z+2=-14 \qquad z+2-2=-14-2 \qquad \mathbf{z=-16}$$

Exercice 4 :

Résoudre les équations suivantes :

$$-10+a=23 \qquad -10+a+10=23+10 \qquad \mathbf{a=33}$$

$$3-h=0 \qquad 3-h+h=0+h \qquad \mathbf{h=3}$$

$$-5+x=-9 \qquad -5+x+5=-9+5 \qquad \mathbf{x=-4}$$

$$7+t=-8 \qquad 7+t-7=-8-7 \qquad \mathbf{t=-15}$$

Exercice 5 :

Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{x}{5}=11 \qquad \frac{x}{5}\times 5=11\times 5 \qquad \mathbf{x=55}$$

$$7y=12 \qquad 7y\div 7=12\div 7 \qquad \mathbf{y=\frac{12}{7}}$$

$$\frac{z}{11}=-5 \qquad \frac{z}{11}\times 11=-5\times 11 \qquad \mathbf{z=55}$$

$$\frac{a}{-5}=6 \qquad \frac{a}{-5}\times(-5)=6\times(-5) \qquad \mathbf{a=-30}$$

Exercice 6 :

Résoudre les équations suivantes :

$$-9h=5 \qquad -9h\div(-9)=5\div(-9) \qquad \mathbf{h=-\frac{5}{9}}$$

$$-\frac{y}{6}=-3 \qquad -\frac{y}{6}\times(-6)=-3\times(-6) \qquad \mathbf{y=18}$$

☞ Exercice 7 :

Résoudre les équations suivantes :

$$4x+3=9$$
$$4x+3-3=9-3$$
$$4x=6$$
$$4x\div 4=6\div 4$$
$$\mathbf{x=\frac{3}{2}=1,5}$$

$$3x+5=7$$
$$3x+5-5=7-5$$
$$3x=2$$
$$3x\div 3=2\div 3$$
$$\mathbf{x=\frac{2}{3}}$$

$$\frac{x}{3}-4=-2$$
$$\frac{x}{3}-4+4=-2+4$$
$$\frac{x}{3}=2$$
$$\frac{x}{3}\times 3=2\times 3$$
$$\mathbf{x=6}$$

Automatisme N18 : Résoudre les équations du premier degré en général

☞ Exercice 8 :

Résoudre les équations suivantes :

$$5x+3=2x-7$$
$$5x+3-3=2x-7-3$$
$$5x=2x-10$$
$$5x-2x=2x-10-2x$$
$$3x=-10$$
$$3x\div 3=-10\div 3$$
$$\mathbf{x=-\frac{10}{3}}$$

$$\frac{2x-3}{5}=7$$
$$\frac{2x-3}{5}\times 5=7\times 5$$
$$2x-3=35$$
$$2x-3+3=35+3$$
$$2x=38$$
$$2x\div 2=38\div 2$$
$$\mathbf{x=19}$$

$$4x+5=3-3x$$
$$4x+5-5=3-3x-5$$
$$4x=-2-3x$$
$$4x+3x=-2-3x+3x$$
$$7x=-2$$
$$7x\div 7=-2\div 7$$
$$\mathbf{x=-\frac{2}{7}}$$

☞ Exercice 9 :

$$7x+1=3x-8$$
$$7x+1-3x-1=3x-8-3x-1$$
$$4x=-9$$
$$4x\div 4=-9\div 4$$
$$\mathbf{x=-\frac{9}{4}}$$

$$13x+6=5x+9$$
$$13x+6-5x-6=5x+9-5x-6$$
$$8x=3$$
$$8x\div 8=3\div 8$$
$$\mathbf{x=\frac{3}{8}}$$

$$\frac{4x+3}{2}=3x$$
$$\frac{4x+3}{2}\times 2=3x\times 2$$
$$4x+3-6x-3=6x-6x-3$$
$$-2x\div -2=-3\div(-2)$$
$$\mathbf{x=\frac{3}{2}}$$

$$x^2+5x-2=x^2+8$$
$$x^2+5x-2-x^2+2=x^2+8-x^2+2$$
$$5x=10$$
$$5x\div 5=10\div 5$$
$$\mathbf{x=2}$$

$$x^2+5x+3=x^2+x-5$$
$$x^2+5x+3-x^2=x^2+x-5-x^2$$
$$5x+3=x-5$$
$$5x+3-x-3=x-5-x-3$$
$$4x=-8$$
$$4x\div 4=-8\div 4$$
$$\mathbf{x=-2}$$

$$7x-11=x+7$$
$$7x-11-x+11=x+7-x+11$$
$$6x=18$$
$$6x\div 6=18\div 6$$
$$\mathbf{x=3}$$

☞ Exercice 10 :

Marc achète une gomme à 2,35 € et 3 stylos. Il paye en tout 8,80 €. Déterminer le prix d'un stylo.

Posons x le prix d'un stylo. Nous avons donc :

$$2,35 + 3x = 8,8$$
$$2,35 + 3x - 2,35 = 8,8 - 2,35$$
$$3x = 6,45$$
$$3x \div 3 = 6,45 \div 3$$
$$\mathbf{x = 2,15}$$

Le prix d'un stylo est donc de 2,15 €.

☞ Exercice 11 :

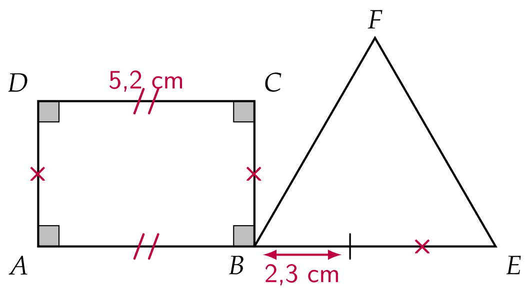
Dans 42 ans, Chiara aura quatre fois son âge actuel. Quel est l'âge de Chiara ?

Posons x l'âge de Chiara actuellement. Nous avons donc :

$$x + 42 = 4x$$
$$x + 42 - 42 = 4x - 42$$
$$x = 4x - 42$$
$$x - 4x = 4x - 42 - 4x$$
$$-3x = -42$$
$$-3x \div (-3) = -42 \div (-3)$$
$$\mathbf{x = 14}$$

Chiara a donc 14 ans.

☞ Exercice 12 :



Le rectangle $ABCD$ et le triangle équilatéral BEF ont le même périmètre.
Déterminer AD puis en déduire BE.

Posons $x = AD$. Nous avons donc :

$$2x + 2 \times 5,2 = 3 \times (2,3 + x)$$
$$2x + 10,4 = 6,9 + 3x$$
$$2x + 10,4 - 10,4 = 6,9 + 3x - 10,4$$
$$2x = -3,5 + 3x$$
$$2x - 3x = -3,5 + 3x - 3x$$
$$-x = -3,5$$
$$-x \times (-1) = -3,5 \times (-1)$$
$$\mathbf{x = 3,5}$$

On a donc $\mathbf{AD = 3,5}$ cm et on en déduit que $\mathbf{BE} = 2,3 + 3,5 = \mathbf{5,8}$ cm.

Leçon n°2 : Triangles semblables

A) Rappel sur les angles d'un triangle

Propriété 1 : Somme des angles d'un triangle

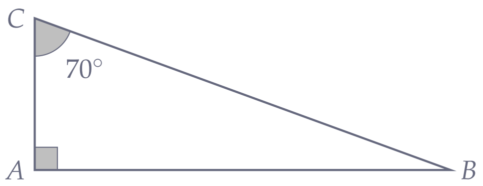
Dans un triangle, la somme des angles fait toujours 180°.

Exemple(s) :

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ci-contre :

On sait que $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$, donc :

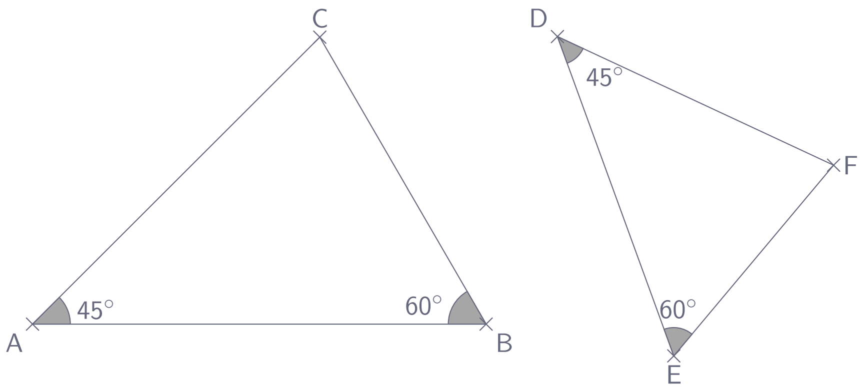
$\widehat{ABC} = 180^\circ - (90^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 160^\circ = \mathbf{20}^\circ$.



B) Caractérisations

Définition 1 : Caractérisation *par les angles* Deux triangles sont semblables si leurs angles sont **deux à deux égaux**.

Exemple(s) :

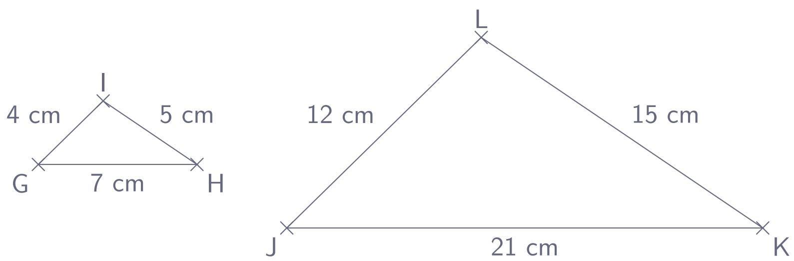


Triangle ABC	Triangle DEF
$\widehat{BAC} = 45^\circ$	$\widehat{EDF} = 45^\circ$
$\widehat{ABC} = 60^\circ$	$\widehat{DEF} = 60^\circ$
$\widehat{ACB} = 75^\circ$	$\widehat{DFE} = 75^\circ$

Les triangles ABC et DEF ont leurs angles égaux deux à deux, ce sont donc des triangles semblables.

Définition 2 : Caractérisation *par les longueurs* Deux triangles sont semblables si leurs longueurs sont **deux à deux proportionnelles**.

Exemple(s) :



Triangle GHI	GH = 7	HI = 5	IG = 4
Triangle JKL	JK = 21	KL = 15	JL = 12

$$\frac{21}{7} = \frac{15}{5} = \frac{12}{4} = 3$$

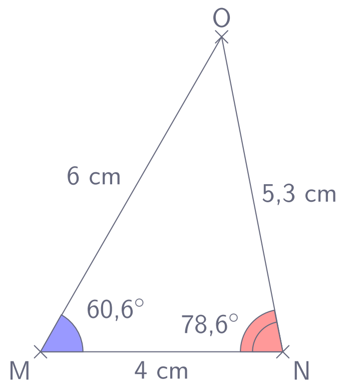
C'est bien un **tableau de proportionnalité** (de coefficient de proportionnalité 3) donc les triangles GHI et JKL sont semblables.

C) Utiliser les triangles semblables pour démontrer

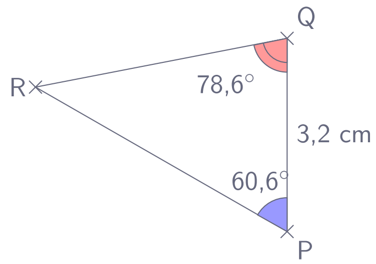
1. Trouver une longueur manquante dans des triangles semblables *grâce à leurs angles*.

Dans le cas où les angles sont connus et que l'on cherche l'une des longueurs, on utilise la **définition 1** pour démontrer que les triangles sont semblables, puis la **définition 2** pour dire que les longueurs sont proportionnelles et ainsi calculer la longueur manquante.

☞ **Exemple(s) :**



Calculer les longueurs RQ et RP dans le triangle ci-dessous :



Méthode 1 :

1) Montrer que les triangles sont semblables :

Les triangles MNO et PQR ont deux angles communs :

$$\widehat{NMO} = \widehat{QPR} = 60,6^\circ \quad \text{et} \quad \widehat{MNO} = \widehat{PQR} = 78,6^\circ$$

Comme la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°, les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{PRQ}$ sont également égaux. Les triangles MNO et PQR ont leurs angles deux à deux égaux, ils sont donc semblables.

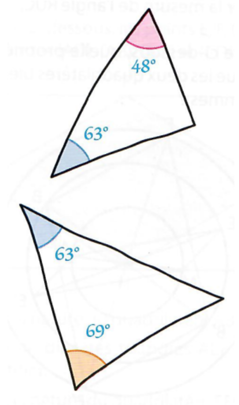
2) En déduire la (ou les) longueur(s) manquante(s) :

On sait que si deux triangles sont semblables, alors leurs longueurs sont proportionnelles deux à deux. Il faut donc construire un tableau de proportionnalité :

Angle « en face »	$\widehat{MON} = \widehat{PRQ}$	$\widehat{MNO} = \widehat{PQR}$	$\widehat{NMO} = \widehat{QPR}$
Triangle MNO	4 cm	6 cm	5,3 cm
Triangle PQR	3,2 cm $= 4 \times \mathbf{0,8}$	$6 \times 0,8 = \mathbf{4,8}$ cm	$5,3 \times 0,8 = \mathbf{4,24}$ cm

Automatisme G06 : Calculer l'angle manquant dans un triangle

Exercice 13 :



Les triangles ci-contre sont-ils semblables ? Justifier.

La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°. Calculons donc les angles manquants :

- Triangle du haut : Angle manquant $= 180° - (63° + 48°) = 180° - 111° = 69°$.
- Triangle du bas : Angle manquant $= 180° - (63° + 69°) = 180° - 132° = 48°$.

Les deux triangles ont leurs angles deux à deux égaux (48°, 63° et 69°), **ce sont donc bien des triangles semblables**.

Exercice 14 :

Compléter les tableaux suivants avec la mesure de l'angle manquant et la nature du triangle. Écris tes calculs sous les tableaux :

$\widehat{BAL}$	$\widehat{ALB}$	$\widehat{LBA}$	Nature du triangle
20°	**73**	87°	**Quelconque**

$180 - (20 + 87) = 180 - 107 = \mathbf{73}$

$\widehat{BOA}$	$\widehat{OAB}$	$\widehat{ABO}$	Nature du triangle
90°	**45**	45°	**Isocèle rectangle en O**

$180 - (90 + 45) = 180 - 135 = \mathbf{45}$

$\widehat{FER}$	$\widehat{ERF}$	$\widehat{RFE}$	Nature du triangle
90°	68°	**22**	**Rectangle en E**

$180 - (90 + 68) = 180 - 158 = \mathbf{22}$

$\widehat{BOL}$	$\widehat{OLB}$	$\widehat{LBO}$	Nature du triangle
60°	**60**	60°	**Équilatéral**

$180 - (60 + 60) = 180 - 120 = \mathbf{60}$

$\widehat{PIN}$	$\widehat{INP}$	$\widehat{NPI}$	Nature du triangle
52	52°	76°	**Isocèle en P**

$180 - (52 + 76) = 180 - 128 = \mathbf{52}$

$\widehat{AMI}$	$\widehat{MIA}$	$\widehat{IAM}$	Nature du triangle
83	83°	14°	**Isocèle en A**

$180 - (83 + 14) = 180 - 97 = \mathbf{83}$

Automatisme G07 : Calculer une longueur dans les triangles semblables

Exercice 15 :

Les triangles ABC et DEF sont semblables.

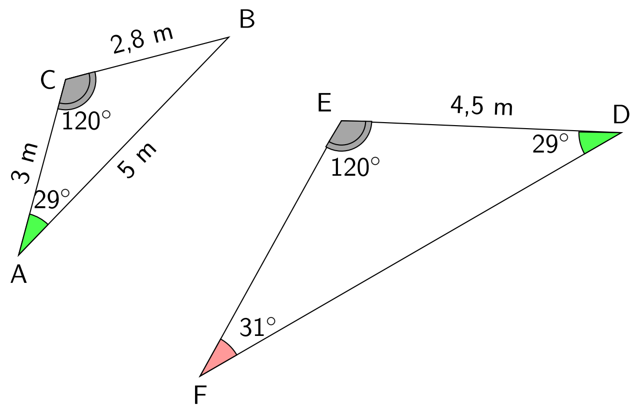
1) Que peut-on dire du tableau ci-contre ?

ABC et DEF sont semblables, donc leurs longueurs sont **proportionnelles**, donc le tableau ci-contre est **un tableau de proportionnalité**.

2) Calcule les longueurs manquantes :

ABC	$AB = 5$ cm	$AC =$ **9** cm	$BC = 7$ cm
DEF	$DE = 15$ cm	$DF = 27$ cm	$EF =$ **21** cm

Exercice 16 :



1) Que peut-on dire des triangles ABC et DEF ? Justifier.

Les triangles ABC et DEF ont deux angles égaux deux à deux (29° et 120°), ce sont donc des **triangles semblables**. Donc leurs longueurs sont deux à deux proportionnelles.

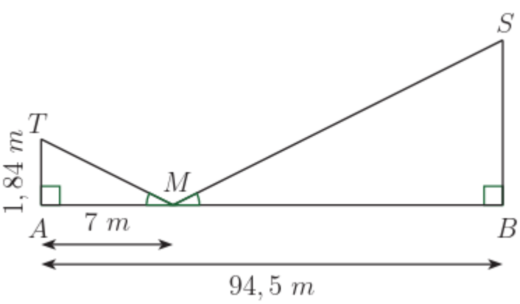
2) En déduire les longueurs EF et DF :

ABC	BC = 2,8 m	AC = 3 m	AB = 5 m
DEF	EF $= \dfrac{2{,}8 \times 4{,}5}{3} = 4{,}2$	ED = 4,5 m	DF $= \dfrac{5 \times 4{,}5}{3} = 7{,}5$ m

On a donc : $EF = 4{,}2$ m et $DF = 7{,}5$ m

Exercice 17 :

Pour estimer la hauteur de l'obélisque de la Concorde à Paris, un touriste mesurant 1,84 m regarde dans un miroir (M) dans lequel il arrive à voir le sommet (S) de l'obélisque. Les angles $\widehat{AMT}$ et $\widehat{BMS}$ ont la même mesure.
Calculer la hauteur de l'obélisque.

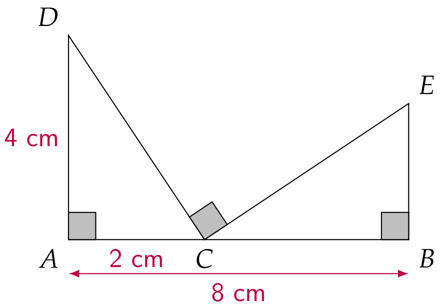


Les triangles AMT et BMS ont deux angles égaux deux à deux ($\widehat{AMT} = \widehat{BMS}$ d'après l'énoncé ; et $\widehat{MAT} = \widehat{MBS} = 90°$ d'après les codages). Ce sont donc des triangles semblables. Or deux triangles semblables ont leurs longueurs proportionnelles deux à deux :

Triangle AMT	$AM = 7$ m	$AT = 1{,}84$ m
Triangle AMT	$BM = 94{,}5 - 7 = 87{,}5$ m	$BS = \dfrac{1{,}84 \times 87{,}5}{7} = 23$ m

L'obélisque de la Concorde mesure donc **23 m** de haut.

Exercice 18 :



Les points A, C et B sont alignés.

1) Démontrer que $\widehat{ACD} = \widehat{BEC}$:

La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°.
Donc $\widehat{BCE} + \widehat{BEC} = 90°$ et $\widehat{ACD} + \widehat{BCE} = 90°$ (car A, C et B sont alignés), donc $\widehat{ACD} = \widehat{BEC}$.

2) On donne $AC = 2$ cm, $AD = 4$ cm et $AB = 8$ cm. Calculer BC et BE :

Les triangles ACB et DEC ont deux angles égaux, ils sont donc semblables, donc leurs longueurs sont proportionnelles :

Triangle ACD	$AC = 2$ cm	$AD = 4$ cm
Triangle BCE	$BC = 8 - 2 = 6$ cm	$BE = \dfrac{4 \times 6}{2} = 12$ cm

Leçon n°3 : Notion de fonction

Les fonctions sont des objets mathématiques très importants. Elles servent à modéliser de nombreux phénomènes, qu'ils soient physiques, biologiques, technologiques ou économiques par exemple.

A) Définitions

Définition 1 : Fonction

Une **fonction** f est un *processus* qui à un nombre x associe un UNIQUE nombre $f(x)$ qui se lit « f de x ». On note :

$$f : x \mapsto f(x)$$

« La fonction f qui à x associe f de x. »

☞ **Exemple(s) :**

1) Quelle est la fonction qui à un nombre x associe son double ?

$$\mathbf{f(x) = 2x}$$

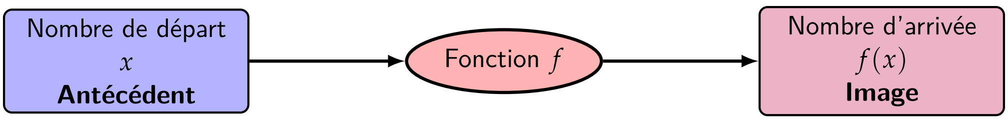
2) Quelle est la fonction qui à un nombre x associe la somme de son carré et de son triple ?

$$\mathbf{f(x) = x^2 + 3x}$$

Définition 2 : Image/antécédent d'un nombre par une fonction

Soit la fonction $f : x \mapsto f(x)$. Alors :

- ☞ Le nombre $f(x)$ est l'**image de x par la fonction f.**
- ☞ Le nombre x est un **antécédent de $f(x)$ par la fonction f.**



☞ **Exemple(s) :**

1) Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 6$. Quelles sont les **images** de 0, de -2 et de -6 par f ?

$\mathbf{f(0)} = 0^2 + 6 = \mathbf{6}$; $\mathbf{f(-2)} = (-2)^2 + 6 = 4 + 6 = \mathbf{10}$; $\mathbf{f(-6)} = (-6)^2 + 6 = 36 + 6 = \mathbf{42}$

2) Soit la fonction $g : x \mapsto x^2$. Quelles sont les **antécédents** de 0, de 9 et de -4 par g ?

$\mathbf{0} = 0^2 = \mathbf{f(0)}$; $\mathbf{9} = 3^2 = \mathbf{f(3)}$; $-\mathbf{4}$ n'est le carré d'aucun nombre donc -4 **n'a pas d'antécédent par** f.

Remarque : Un nombre a toujours **une seule image** par une fonction f. Par contre, un nombre peut avoir **aucun, un ou plusieurs antécédents** par une fonction f.

Méthode 1 : Calculer l'image d'un nombre par une fonction donnée

Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction f donnée, il faut « faire passer le nombre dans la machine f ». Pour cela, on **remplace la variable (x) par le nombre choisi** dans l'expression de f.

Attention à ne pas oublier de rajouter les $\times$ omis dans l'écriture de la fonction ! ($2x = 2 \times x$)

☞ **Exemple(s) :**

☞ Calculer l'image de 5 par la fonction $f : x \mapsto 4x - 2$:

$f(5) = 4 \times 5 - 2 = 20 - 2 = \mathbf{18}$

☞ Calculer l'image de $1,9$ par $g : x \mapsto \dfrac{8x+3}{5x}$

$$g(1,9) = \frac{8 \times 1,9 + 3}{5 \times 1,9} = \frac{13,2}{9,5} \approx \mathbf{1,4}$$

Automatisme F01 : Utiliser le vocabulaire des fonctions (image, antécédent...)

☞ **Exercice 19 :**

Une fonction f est telle que $f(-3) = 4$. Traduire cette égalité par une phrase contenant...

1) ... le mot « image » :

4 est l'image de -3 par la fonction f.

2) ... le mot « antécédent » :

-3 est un antécédent de 4 par la fonction f.

☞ **Exercice 20 :**

Traduire les phrases suivantes par une égalité :

1) « L'image de 3 par la fonction f est -5 »

$\mathbf{f(3) = -5}$

2) « -4 est un antécédent de 7 par la fonction g »

$\mathbf{g(-4) = 7}$

Automatisme F02 : Calculer une image

☞ **Exercice 21 :**

Parmi les fonctions suivantes, entourer celle(s) qui, à un nombre x, associe son triple :

$f : x \mapsto x + 3$	$\boxed{g(x) = 4x - x = \mathbf{3x}}$	$\boxed{h : x \mapsto 3x}$
$j(x) = 3x^2$	$\boxed{k(x) = 3x}$	$l : x \mapsto -3x$

☞ **Exercice 22 :**

Calculer les images avec la méthode demandée (les questions sont indépendantes).

1) On donne le programme de calcul suivant qui correspond à une certaine fonction :

- ☞ Choisir un nombre.
- ☞ Multiplier ce nombre par 5.
- ☞ Ajouter 3 au résultat obtenu.

a. Appliquer ce programme de calcul au nombre 6 :

$6 \times 5 + 3 = 30 + 3 = \mathbf{33}$

b. Traduire ce calcul par une phrase contenant le mot « image ».

L'**image** de 6 par cette fonction est 33.

2) Soit f la fonction définie par l'expression algébrique $f(x) = 2x + 9$.

a. Calculer l'image de 7 :

$f(7) = 2 \times 7 + 9 = 14 + 9 = \mathbf{23}$

b. Traduire ce calcul par une phrase contenant le mot « image ».

L'**image** de 7 par la fonction f est 23.

Exercice 23 :

Calculer les images avec la méthode demandée (les questions sont indépendantes).

1) Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto \dfrac{3x}{x+20}$.

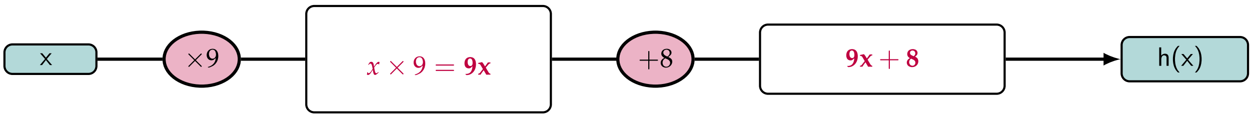
a. Calculer l'image de 5 :

$g(5) = \dfrac{3 \times 5}{5+20} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0,6}$

b. Traduire ce calcul par une phrase contenant le mot « image ».

L'**image** de 5 par la fonction g est $0,6$.

2) Soit h la fonction définie par le diagramme :



a. Calculer l'image de 3 :

$h(3) = 9 \times 3 + 8 = 27 + 8 = \mathbf{35}$

b. Traduire ce calcul par une phrase contenant le mot « image ».

L'**image** de 3 par la fonction h est 35.

Exercice 24 :

1) On considère la fonction f définie par : $f : x \mapsto 4x - 10$. Calculer $f(-5)$:

$f(-5) = 4 \times (-5) - 10 = -20 - 10 = \mathbf{-30}$

2) On considère la fonction g définie par : $g : x \mapsto 3x^2 + 5x + 5$. Calculer $g(9)$:

$g(9) = 3 \times 9^2 + 5 \times 9 + 5 = 3 \times 81 + 45 + 5 = 243 + 45 + 5 = \mathbf{293}$

3) On considère la fonction h définie par : $h : x \mapsto (3x-2)^2$. Calculer $h(-1)$:

$h(-1) = (3 \times (-1) - 2)^2 = (-3-2)^2 = (-5)^2 = \mathbf{25}$

4) On considère la fonction i définie par : $i : x \mapsto -8x + 8$. Calculer $i(1)$:

$i(1) = -8 \times 1 + 8 = -8 + 8 = \mathbf{0}$

5) On considère la fonction j définie par : $j : x \mapsto (-4x+2)(4x-3)$. Calculer $j(-2)$:

$j(-2) = (-4 \times (-2) + 2)(4 \times (-2) - 3) = (8+2)(-8-3) = 10 \times (-11) = \mathbf{-110}$

6) On considère la fonction k définie par : $k : x \mapsto \dfrac{4}{8x+3}$. Calculer $k(-4)$:

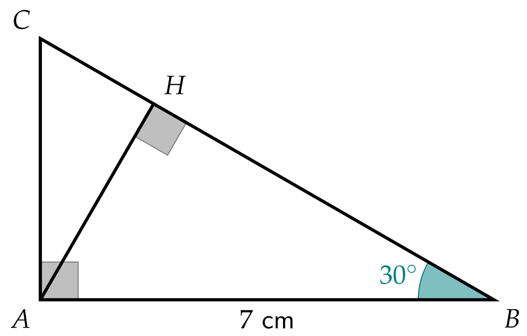
$k(-4) = \dfrac{4}{8 \times (-4) + 3} = \dfrac{4}{-32+3} = \dfrac{4}{-29} = -\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{29}}$

Vers le DNB

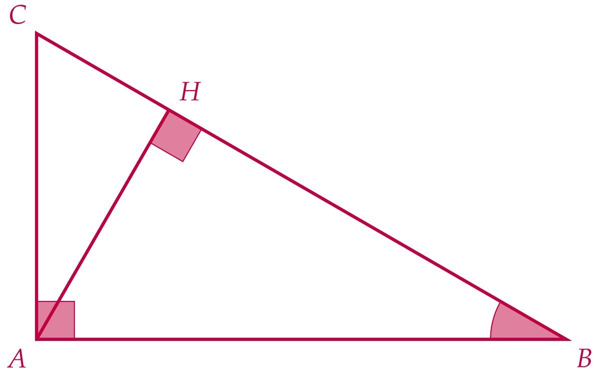
☞ **Exercice 25** - ***d'après Pondichéry Mai 2018 (exercice n°7 - 16 points)*** :

La figure ci-contre n'est pas à l'échelle.

On considère ci-dessus un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 30°$ et $AB = 7$ cm. H est le pied de la hauteur issue de A.



1) Tracer la figure en vraie grandeur sur la copie. Laisser apparents les traits de construction.



Commencer par tracer $[AB]$, puis l'angle $\widehat{ABC}$ et l'angle droit en A.
Prolonger les 2 demi-droites jusqu'à ce qu'elles se croisent en C.
Tracer finalement H avec l'équerre.

2) Démontrer que $AH = 3,5$ cm.

Dans le triangle ABH rectangle en H :

- ☞ On connait AB, l'**hypoténuse** ;
- ☞ On cherche AH, le **côté adjacent**.

On utilise donc le **sinus** :

$$\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AH}{AB} \quad \text{donc} \quad \frac{\sin(30°)}{1} = \frac{AH}{7} \quad \text{donc} \quad AH = 7 \times \sin(30°) = \mathbf{3,5}$$

On a bien $\mathbf{AH = 3,5}$ **cm**.

3) Démontrer que les triangles ABC et HAC sont semblables.

Les triangles ABC et HAC sont rectangles, ont en commun l'angle en C de mesure $60°$, donc leurs troisièmes angles ont pour mesure $30°$: ils sont donc semblables.

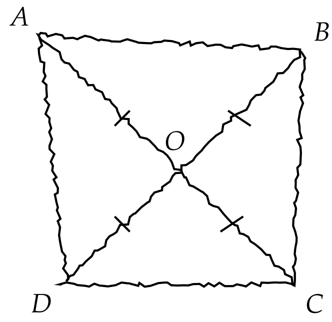
4) Déterminer le coefficient de réduction permettant de passer triangles ABC et HAC sont semblables.

En comparant les côtés adjacents aux angles de mesure $30°$, on a un coefficient de réduction de :

$$\frac{\text{AH}}{\text{AB}} = \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Les dimensions de HAC sont deux fois plus petites que celles du triangle ABC.

☞ **Exercice 26** - ***d'après Asie Juin 2019 (exercice n°5 - 12 points)*** :



La figure ci-contre est codée et réalisée à main levée.

Elle représente un quadrilatère ABCD dont les diagonales se croisent en un point O.

On donne : $OA = 3{,}5$ cm et $AB = 5$ cm.

On s'intéresse à la nature du quadrilatère $ABCD$ qui a été représenté.

1) Peut-on affirmer que $ABCD$ est un rectangle ?

O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$ donc $ABCD$ est un **parallélogramme** ;

$AC = AO + OC = OB + OD = BD$; les diagonales de ce parallélogramme ont la même longueur donc $ABCD$ est donc un **rectangle**.

2) Peut-on affirmer que $ABCD$ est un carré ?

Si ABCD est un carré ses diagonales sont perpendiculaires et dans ce cas le triangle AOB serait rectangle. Vérifions donc si c'est un triangle rectangle ou non :

Dans le triangle AOB, AB est le côté le plus long :

D'une part :

$$AB^2 = 5^2 = \mathbf{25}$$

D'autre part :

$$OA^2 + OB^2 = 3{,}5^2 + 3{,}5^2 = 12{,}25 + 12{,}25 = \mathbf{24{,}5}$$

On constate que $AB^2 \neq OA^2 + OB^2$ donc **l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée**, donc AOB n'est pas un triangle rectangle, donc $ABCD$ n'est **pas un carré**.

☞ **Exercice 27** - ***d'après Nouvelle-Calédonie Décembre 2020 (exercice n°3 - 11 points)*** :

On donne les deux programmes de calcul suivants :

Programme A	**Programme B**
☞ Choisir un nombre ☞ Soustraire 5 à ce nombre ☞ Multiplier le résultat par le nombre de départ	☞ Choisir un nombre ☞ Mettre ce nombre au carré ☞ Soustraire 4 au résultat

1) Alice choisit le nombre 4 et applique le programme A. Montrer qu'elle obtiendra -4.

$4-5=\mathbf{-1}$; $-1\times 4=\mathbf{-4}$

Si elle choisit 4 pour le programme A, elle obtient bien -4.

2) Lucie choisit le nombre -3 et applique le programme B. Quel résultat va-t-elle obtenir ?

$(-3)^2=\mathbf{9}$; $9-4=\mathbf{5}$

Si elle choisit -3 pour le programme B, elle obtient 5.

Tom souhaite trouver un nombre pour lequel des deux programmes de calculs donneront le même résultat. Il choisit x comme nombre de départ pour les deux programmes.

3) Montrer que le résultat du programme A peut s'écrira x^2-5x.

$x-5$; $(x-5)\times x=x(x-5)$

On peut ensuite développer l'expression obtenue :

$$x(x-5)=x\times x-x\times 5=\mathbf{x^2-5x}$$

Le programme A a donc bien pour expression x^2-5x.

4) Exprimer en fonction de x le résultat obtenu avec le programme B.

x^2 ; $\mathbf{x^2-4}$

L'expression est déjà développée et simplifiée.

Le programme B a donc pour expression x^2-4.

5) Quel est le nombre que Tom cherche ? **Toute trace de recherche même non aboutie sera prise, en compte dans la notation.**

Tom cherche la valeur de x telle que les résultats des deux programmes soient égaux. Il faut donc **poser une équation** :

Programme A = Programme B

$$x^2-5x=x^2-4$$
$$x^2-5x-x^2=x^2-4-x^2$$
$$-5x=-4$$
$$-5x\div(-5)=-4\div(-5)$$
$$\mathbf{x=\frac{4}{5}=0,8}$$

La valeur pour laquelle les deux programmes donnent le même résultat est $\frac{4}{5}=0,8$.

Brouillon