# Séquence 9

## Leçon n°1 - Nombres et calculs : Arithmétique - Nombres premiers

| Notions à **connaître** : | Page(s) : |
|---|---|
| La définition d'un nombre premier. | 2 |
| Tous les nombres premiers inférieurs à 30. | 2 |
| La méthode de décomposition en facteurs premiers. | 2 |
| La définition du PGCD et comment le calculer. | 3 |
| La définition d'une fraction irréductible. | 3 |

❑ Trace écrite : **Carte mentale n°11 : « Arithmétique »**, parties « Nombres premiers » et « PGCD ».

| Code | **Automatismes** à maîtriser : | Exercices : | Page(s) : |
|---|---|---|---|
| N22 | ❑ Décomposer un nombre en facteurs premiers. | 1 à 6 | 4 à 5 |
| N23 | ❑ Calculer et utiliser un PGCD. | 7 à 8 | 6 |
| N24 | ❑ Simplifier une fraction avec la décomposition en facteurs premiers. | 9 à 11 | 7 |

## Leçon n°2 - Données : Médiane avec ECC

| Notions à **connaître** : | Page(s) : |
|---|---|
| La méthode pour remplir un tableau avec ECC. | 8 |
| La méthode pour calculer une médiane avec ECC. | 8 |
| Les commandes pour calculer l'étendue, la médiane et la moyenne avec un tableur. | 8 |

❑ Trace écrite : **Carte mentale n°6 : « Statistiques »**, partie « Médiane avec ECC ».

| Code | **Automatismes** à maîtriser : | Exercices : | Page(s) : |
|---|---|---|---|
| D12 | ❑ Calculer une médiane avec ECC. | 12 à 18 | 9 à 10 |

## Vers le DNB...

❑ Arithmétique, Thalès : n°2 Métropole - Juin 2021 (20 points) .............................. n°19 p.11

❑ Arithmétique : n°3 Métropole - Juin 2022 (20 points) .................................... n°20 p.12

❑ Scratch : n°2 Métropole - Septembre 2023 (14 points) .................................. n°21 p.12-13

# Leçon n°1 : Arithmétique - Nombres premiers

## A) Nombres premiers

### 1. Définition et exemples à connaître

**Définition 1 : Nombre premier**

Un **nombre premier** est un entier positif qui a **exactement** 2 diviseurs : 1 et lui-même.

**Exemple(s) :**

- 4 n'est pas premier : **il a 3 diviseurs : 1, 4 et 2 !**
- ⚠ 1 n'est pas un nombre premier ! Il n'a en effet qu'un seul diviseur : lui-même ⚠
- Les 10 nombres premiers inférieurs à 30 sont **à connaître PAR CŒUR : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29**

### 2. Décomposition en facteurs premiers

**Propriété 1 : Décomposition en facteurs premiers**

Tout nombre entier peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un **produit de nombres premiers**.

**Méthode 1 : Décomposition en facteurs premiers**

Pour décomposer un nombre $N$ en produit de facteurs premiers, on commence par chercher le plus petit nombre premier qui divise $N$, et on effectue cette division autant de fois que c'est possible. Puis on recommence avec le nombre premier suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir 1.

**Exemple(s) :**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 126 | 2 | 504 | 2 | 2 530 | 2 | 728 | 2 |
| 63 | 3 | 252 | 2 | 1 265 | 5 | 364 | 2 |
| 21 | 3 | 126 | 2 | 253 | 11 | 182 | 2 |
| 7 | 7 | 63 | 3 | 23 | 23 | 91 | 7 |
| 1 | | 21 | 3 | 1 | | 13 | 13 |
| | | 7 | 7 | | | 1 | |
| | | 1 | | | | | |

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

$2\,530 = 2 \times 5 \times 11 \times 23$

$728 = 2^3 \times 7 \times 13$

## 3. Plus Grand Commun Diviseur ($PGCD$)

**Définition 2 :** Comme son nom l'indique, le **plus grand commun diviseur** de deux nombres $a$ et $b$, appelé par la suite $PGCD(a;b)$, est le plus grand de tous les diviseurs communs à $a$ et $b$.

**Exemple(s) :**

Lister tous les diviseurs de 38 : 1 ; 2 ; 19 ; 38 et de 57 : 1 ; 3 ; 19 ; 57

Donc $\mathbf{PGCD}(38;57) = \mathbf{19}$

**Méthode 2 : Calculer le $PGCD$ de deux nombres**

Il faut décomposer $a$ et $b$ en facteurs premiers, puis prendre la « partie commune »aux deux décompositions :

**Exemple(s) :**

Décomposer 156 et 24 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$156 = 2^2 \times 3 \times 13$ $\qquad$ $24 = 2^3 \times 3$

En déduire : $PGCD(156;24) = \mathbf{2^2 \times 3 = 12}$

**Quand utilise-t-on le PGCD ?**
Les énoncés demandant par exemple « quel est le **plus grand nombre de groupes** de même composition que l'on peut constituer » demandent généralement en fait d'utiliser le $PGCD$. Voir les exercices concernés dans les automatismes.

# B) Simplification de fractions

**Définition 3 :** Une **fraction** $\dfrac{a}{b}$ est dite **irréductible** si $a$ et $b$ ont pour UNIQUE diviseur commun 1.

**Exemple(s) :**

- $\dfrac{22}{9}$ est irréductible car : diviseurs de 22 : { 1 ; 2 ; 11 ; 22 } et diviseurs de 9 : { 1 ; 3 ; 9 }.
- $\dfrac{63}{21}$ n'est pas irréductible car 63 et 21 ont **3**, **7**, et **21** comme diviseurs communs autres que 1.

**Méthode 3 : Simplifier une fraction**

Il faut décomposer son numérateur ET son dénominateur en facteurs premiers, puis de simplifier les facteurs identiques :

**Exemple(s) :**

Simplifions la fraction $\dfrac{204}{72}$. Pour cela on commence par décomposer 204 et 72 en facteurs premiers :

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r\|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ Donc $204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$ | $\begin{array}{r\|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ Donc $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ |

On peut ensuite simplifier la fraction : $\dfrac{204}{72} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 17}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3} = \dfrac{17}{2 \times 3} = \boxed{\dfrac{17}{6}}$

# Automatisme N22 : Décomposer un nombre en facteurs premiers.

## Exercice 1 :

Entoure les nombres premiers :

$35 = 7 \times 5$ $36 = 9 \times 4$ $37$ $38 = 2 \times 19$ $39 = 3 \times 13$

## Exercice 2 :

Vrai ou Faux ?

| | | | Justification : |
|---|---|---|---|
| 1) Tout nombre est diviseur de lui-même. | ☑ VRAI | ❑ FAUX | $k = k \times 1$ pour tout $k$ donc $k$ divise $k$. |
| 2) 1 divise tout nombre entier. | ☑ VRAI | ❑ FAUX | $k = 1 \times k$ pour tout $k$ donc 1 divise $k$. |
| 3) Tout nombre impair est premier. | ❑ VRAI | ☑ FAUX | Par exemple 9 est impair mais pas premier ($9 = 3 \times 3$). |
| 4) Tout nombre pair est premier. | ❑ VRAI | ☑ FAUX | Par exemple 4 est pair mais pas premier ($4 = 2 \times 2$). |
| 5) **Il existe une infinité de nombres premiers.** | ☑ VRAI | ❑ FAUX | |
| 6) Il y a toujours un écart de 2 entre deux nombres premiers. | ❑ VRAI | ☑ FAUX | Si on prend la liste des premiers nombres premiers c'est évident. |

## Exercice 3 :

On dit que **deux nombres sont premiers entre eux** s'ils n'ont **que 1 comme diviseur commun**.

1) Trouver tous les diviseurs de 45 :

1 ; 45 ; 3 ; 15 ; 5 ; 9.

2) Trouver tous les diviseurs de 28 :

1 ; 28 ; 2 ; 14 ; 4 ; 7.

3) Les nombres 45 et 28 sont-ils premiers entre eux ?

45 et 28 ont 1 comme **unique** diviseur commun, donc **ils sont premiers entre eux**.

4) Peut-on trouver deux nombres **pairs** premiers entre eux ? Justifier.

**Non**, car par définitions les nombres pairs sont tous divisibles par 2, qu'ils ont donc forcément comme diviseur commun (et pas seulement 1).

5) Peut-on trouver deux nombres **impairs** premiers entre eux ? Justifier.

**Oui**, par exemple 3 et 5 !

## Exercice 4 :

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $12 = 2^2 \times 3$ $\begin{array}{r\|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ | $28 = 2^2 \times 7$ $\begin{array}{r\|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ | $75 = 3 \times 5^2$ $\begin{array}{r\|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ | $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ $\begin{array}{r\|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ | $5\,005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ $\begin{array}{r\|l} 5\,005 & 5 \\ 1\,001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ |

## Exercice 5 :

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $96 = 2^5 \times 3$ $\begin{array}{r\|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ | $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ $\begin{array}{r\|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ | $196 = 2^2 \times 7^2$ $\begin{array}{r\|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ | $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ $\begin{array}{r\|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ | $64 = 2^6$ $\begin{array}{r\|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$ |

## Exercice 6 :

Un magicien demande à un spectateur de choisir un nombre à 3 chiffres, sans le dévoiler, puis de recopier ce nombre à sa suite de manière à obtenir un nombre à 6 chiffres. Par exemple si le spectateur choisit 126, il obtient alors 126 126. Le magicien demande alors au spectateur de diviser ce nombre à 6 chiffres par 7, puis de diviser le résultat par 11, et enfin par 13. Il annonce alors : « Le résultat obtenu est le nombre à 3 chiffres du début ! »

Comment expliquer ce tour de magie ?

Notons $N$ le nombre à 3 chiffres de départ. Transformer 126 en 126 126, cela revient à le multiplier par 1 001. Pour obtenir le nombre à 6 chiffres on prend donc $\boxed{N \times 1\,001}$. Décomposons 1 001 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 1\,001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

On a donc $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$. Donc quand on fait les divisions, cela revient à effectuer le calcul suivant :

$$\frac{N \times 1\,001}{7 \times 11 \times 13} = \frac{N \times 7 \times 11 \times 13}{7 \times 11 \times 13} = N$$

Ce qui explique pourquoi on retombe forcément sur le nombre initial !

# Automatisme N23 : Calculer et utiliser un PGCD.

☞ **Exercice 7 :**

1) Un fleuriste dispose de 102 iris et de 170 roses. Il veut, en utilisant toutes ses fleurs, réaliser un maximum de bouquets contenant tous le même nombre d'iris et le même nombre de roses. Quel est le nombre maximal de bouquets ? Dans chaque bouquet, combien y a-t-il d'iris et de roses ?

Décompositions en facteurs premiers :

- ☞ Iris : $102 = 2 \times 3 \times 17$
- ☞ Roses : $170 = 2 \times 5 \times 17$

Il y aura donc $PGCD(102; 170) = 2 \times 17 =$ **34 bouquets** contenant chacun **3 iris** et **5 roses**.

2) Un professeur organise une sortie pédagogique au Futuroscope pour ses élèves de 3e. Il est accompagné de 363 garçons et de 99 filles. Il souhaite répartir tous les élèves en réalisant un maximum de groupes contenant tous le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Quel est le nombre maximal de groupes ? Dans chaque groupe, combien y a-t-il de graçons et de filles ?

Décompositions en facteurs premiers :

- ☞ Garçons : $363 = 3 \times 11^2$
- ☞ Filles : $99 = 3^2 \times 11$

Il y aura donc $PGCD(363; 99) = 3 \times 11 =$ **33 groupes** contenant chacun **11 garçons** et **3 filles**.

3) Un boulanger dispose de 64 croissants et de 224 brioches. Il veut, en utilisant toutes ses viennoiseries, réaliser un maximum de corbeilles contenant toutes le même nombre de croissants et le même nombre de brioches. Quel est le nombre maximal de corbeilles ? Dans chaque corbeille, combien y a-t-il de croissants et de brioches ?

Décompositions en facteurs premiers :

- ☞ Croissants : $64 = 2^6$
- ☞ Brioches : $224 = 2^5 \times 7$

Il y aura donc $PGCD(64; 224) = 2^5 =$ **32 corbeilles** contenant chacune **2 croissants** et **7 brioches**.

☞ **Exercice 8 :**

*D'après DNB Asie 2015*

À la fin d'une fête de village, tous les enfants présents se partagent équitablement les 397 ballons de baudruche qui ont servi à la décoration. Il reste alors 37 ballons. L'année suivante, les *mêmes* enfants se partagent équitablement les 598 ballons utilisés cette année-là. Il en reste alors 13.

Combien d'enfants, *au maximum*, étaient présents ?

À la première fête, il restait 37 ballons sur 397, il y a donc $397 - 37 = 360$ ballons qui ont été partagés. Le nombre d'enfants est donc un **diviseur de 360**.

À la seconde fête, il restait 13 ballons sur 598, il y a donc $598 - 13 = 585$ ballons qui ont été partagés. Le nombre d'enfants est donc un **diviseur de 585**.

Cherchons le **plus grand diviseur commun** à 360 et 585 :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\begin{array}{r|l} 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$585 = 3^2 \times 5 \times 13$$

D'où $PGCD(360; 585) = 3^2 \times 5 =$ **45**.

**Il y avait donc 45 enfants.**

# Automatisme N24 : Simplifier une fraction avec la décomposition en facteurs premiers.

## Exercice 9 :

Simplifie les fractions suivantes :

- $\dfrac{138}{105} = \dfrac{2 \times \cancel{3} \times 23}{\cancel{3} \times 5 \times 7} = \boxed{\dfrac{46}{35}}$
- $\dfrac{144}{216} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$
- $\dfrac{48}{175} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{5 \times 5 \times 7} = \boxed{\dfrac{48}{175}}$
- $\dfrac{120}{450} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 5} = \boxed{\dfrac{4}{15}}$
- $\dfrac{1\ 925}{3\ 185} = \dfrac{\cancel{5} \times 5 \times \cancel{7} \times 11}{\cancel{5} \times \cancel{7} \times 7 \times 13} = \boxed{\dfrac{55}{91}}$
- $\dfrac{504}{1\ 050} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 5 \times 5 \times \cancel{7}} = \boxed{\dfrac{12}{25}}$

## Exercice 10 :

Simplifie les fractions suivantes :

- $\dfrac{12}{25} = \dfrac{2 \times 2 \times 3}{5 \times 5} = \boxed{\dfrac{12}{25}}$
- $\dfrac{126}{72} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 7}{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = \boxed{\dfrac{7}{4}}$
- $\dfrac{525}{405} = \dfrac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 5 \times 7}{\cancel{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{5}} = \boxed{\dfrac{35}{27}}$
- $\dfrac{720}{3\ 150} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 5 \times 7} = \boxed{\dfrac{8}{35}}$
- $\dfrac{315}{60} = \dfrac{3 \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 7}{2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5}} = \boxed{\dfrac{21}{4}}$
- $\dfrac{140}{224} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 5 \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{7}} = \boxed{\dfrac{5}{8}}$
- $\dfrac{55}{150} = \dfrac{\cancel{5} \times 11}{2 \times 3 \times 5 \times \cancel{5}} = \boxed{\dfrac{11}{30}}$
- $-\dfrac{52}{88} = -\dfrac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 13}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 11} = -\boxed{\dfrac{13}{22}}$

## Exercice 11 :

Dans le village *Solidarity*, 1 520 personnes ont fait un don de charité sur 1 710 habitants en tout, tandis que dans le village *Solidaritat*, 1 840 personnes ont fait un don parmi les 2 070 habitants.

1) Exprimer pour chacun de villages la *proportion* de personnes ayant effectué un don, sous forme d'une fraction, puis simplifier les deux fractions obtenues :

*Solidarity* : $\dfrac{1\ 520}{1\ 710} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{5} \times \cancel{19}}{\cancel{2} \times 3 \times 3 \times \cancel{5} \times \cancel{19}} = \boxed{\dfrac{8}{9}}$

*Solidaritat* : $\dfrac{1\ 840}{2\ 070} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{5} \times \cancel{23}}{\cancel{2} \times 3 \times 3 \times \cancel{5} \times \cancel{23}} = \boxed{\dfrac{8}{9}}$

2) Que peut-on en conclure sur la générosité des habitants de ces deux villages ?

On remarque que même si l'un des deux villages a plus donné que l'autre, quand on le rapporte au nombre d'habitants la proportion est la même. Les habitants des deux villages sont donc aussi généreux les uns que les autres.

# Leçon n°2 : Médiane avec ECC

## 1. Calcul de médiane dans un tableau d'effectifs

Lorsqu'il y a trop de valeurs dans la série statistique pour toutes les lister, il faut utiliser un **tableau d'effectifs**. On calcule alors les **effectifs cumulés croissants (ECC)** afin de trouver la médiane :

☞ Exemple(s) :

| Valeur | 4 | 5 | 9 | 15 | 21 | 52 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 5 | 7 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| ECC | **5** | $5+7=$ **12** | $12+3=$ **15** | $15+3=$ **18** | $18+2=$ **20** | $20+1=$ **21** |
| Positions | **1 → 5** | **6 → 12** | **13 → 15** | **16 → 18** | **19 → 20** | **21 → 21** |

**1) Quel est l'effectif *total* de cette série statistique ?**

Il y a **21 éléments (impair)** dans cette série.

**2) En déduire la position de la médiane de cette série statistique :**

$$\text{Position de la médiane} = \frac{\mathbf{21}+1}{2} = \frac{22}{2} = \mathbf{11^{ème}\ place}$$

**3) En déduire la médiane de cette série statistique :**

Comme la médiane est à la 11ème position, d'après le tableau il s'agit de la valeur 5.

**4) Calculer la moyenne de cette série statistique :**

$$\text{Moyenne} = \frac{\text{Valeurs} \times \text{Effectifs}}{\text{Effectif total}} = \frac{4\times5+5\times7+9\times3+15\times3+21\times2+52\times1}{21} = \frac{221}{21} \approx \mathbf{10,5}$$

**5) Que remarques-tu ? Comment peut-on l'expliquer ?**

On remarque que la **moyenne (10,5)** est bien plus haute que la **médiane (5)**. Cela s'explique par les quelques hautes valeurs qui « tirent la moyenne vers le haut », alors qu'il y a beaucoup de petites valeurs, plus représentatives de la série.

## 2. Avec le tableur (TP notes DNB)

**Code :**

Les formules suivantes sont **à connaître** !

- ☞ Calculer le **minimum** des cases A1 jusqu'à K1 : « `= MIN(A1:K1)` »
- ☞ Calculer un **maximum** des cases C1 jusqu'à C24 : « `= MAX(C1:C24)` »
- ☞ Calculer une **moyenne** des cases B3 jusqu'à F15 : « `= MOYENNE(B3:F15)` »
- ☞ Calculer une **médiane** des cases A10 jusqu'à B26 : « `= MEDIANE(A10:B26)` »

- ❏ Aller sur le site « `madame-scohy.fr` »
  `> Collège > Cours > Cours 3ème`
  `> Séquence 9 : Nbs premiers, médiane avec ECC`
- ❏ Télécharger le fichier « `TP_notes_DNB_ELEVE` ».
- ❏ Remplir le tableau puis recopier les valeurs ci-contre.
- ❏ (BONUS) Aller sur l'onglet « `Tableau d'effectifs` », puis tracer le **diagramme colonne** des notes.

| | | | | | Global : |
|---|---|---|---|---|---|
| **MIN** | 5 | 2 | 6 | 1 | 1 |
| **MAX** | 73 | 57 | 74 | 64 | 74 |
| **ÉTENDUE** | 68 | 55 | 68 | 1 | 73 |
| **MÉDIANE** | 22 | 13 | 16 | 16,5 | 18 |
| **MOYENNE** | 25,38 | 18,21 | 22,61 | 22,96 | 21,68 |

# Automatisme D12 : Calculer une médiane avec ECC.

## Exercice 12 :

Compléter le tableau suivant et en déduire la médiane de la série :

| Valeur | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 11 | 20 | 9 | 7 | 29 | 32 | 15 |
| ECC | **11** | **31** | **40** | **47** | **76** | **108** | **123** |
| Rangs | **1 à 11** | **12 à 31** | **32 à 40** | **41 à 47** | **48 à 76** | **77 à 108** | **109 à 123** |

L'effectif total est de 123 **impair** donc la médiane est située à la :

$\dfrac{123+1}{2} = \dfrac{124}{2} = 62^{\text{ème}}$ position

D'après la dernière ligne du tableau, on a donc **médiane**$=$ **5**.

## Exercice 13 :

Compléter le tableau suivant et en déduire la médiane de la série :

| Valeur | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 5 | 15 | 25 | 1 | 20 | 10 |
| ECC | **5** | **20** | **45** | **46** | **66** | **76** |
| Rangs | **1 à 5** | **6 à 20** | **21 à 45** | **46 à 46** | **47 à 66** | **67 à 76** |

L'effectif total est de 76 **pair** donc la médiane est située entre les :

$\dfrac{76}{2} = 38^{\text{ème}}$ et $39^{\text{ème}}$ positions

D'après la dernière ligne du tableau, on a donc **médiane**$=$ $\mathbf{-3}$.

## Exercice 14 :

On a relevé la température à un même instant mais à des endroits différents :

| T (en °C) | -11 | -7 | -1 | 2 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 7 | 3 | 5 | 11 | 6 | 2 |
| ECC | **7** | **10** | **15** | **26** | **32** | **34** |
| Rangs | **1 à 7** | **8 à 10** | **11 à 15** | **16 à 26** | **27 à 32** | **33 à 34** |

1) Combien de relevés ont été effectués ?

Il y a eu (effectif total) $7+3+5+11+6+2 = \mathbf{34}$ relevés.

2) À combien d'endroits la température est-elle inférieure à $-1$°C ? à $5$°C ?

En prenant les ECC on trouve que la température est inférieure à $-1$°C dans **15 endroits**, et à $5$°C dans **32 endroits**.

3) Remplir les 2 dernières lignes du tableau.

4) a. Déterminer la médiane de cette série.

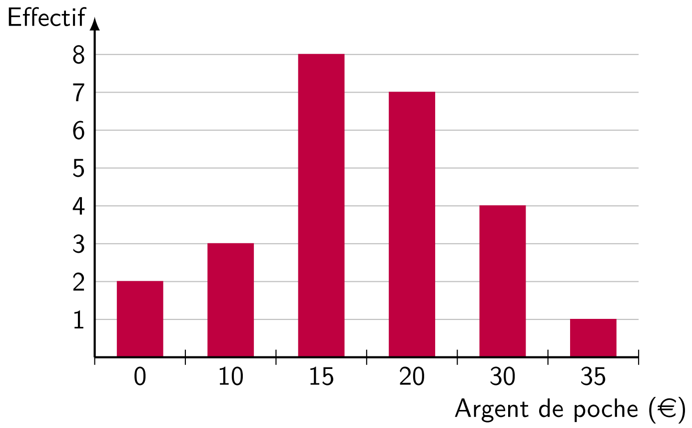
L'effectif total de 34 (**pair**) donc la médiane est située entre les $\dfrac{34}{2} = 17^{\text{ème}}$ et $18^{\text{ème}}$ positions.
D'après la dernière ligne du tableau, on a donc **médiane**$=$ **2°C**.

b. Interpréter le résultat.

Dans la moitié des endroits, la température était inférieure ou égale à 2°C, et dans l'autre moitié, elle était supérieure ou égale à 2°C.

## Exercice 15 :

On a demandé à des élèves la somme d'argent de poche que leurs parents leur donnent chaque mois. Voici les résultats :




| Argent (€) | 0 | 10 | 15 | 20 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | **2** | **3** | **8** | **7** | **4** | **1** |
| ECC | **2** | **5** | **13** | **20** | **24** | **25** |
| Rangs | **1 à 2** | **3-5** | **6-13** | **14-20** | **21-24** | **25-25** |

1) Calculer l'étendue de cette série :

Étendue$= 35 - 0 =$ **35 €**

2) Compléter le tableau ci-dessus.

3) Déterminer la médiane de cette série et interpréter le résultat.

L'effectif total est de 25 **impair** donc la médiane est située à la $\dfrac{25+1}{2} = \dfrac{26}{2} = 13^{\text{ème}}$ position.
D'après la dernière ligne du tableau, on a donc **médiane= 15**. La moitié des élèves ont donc 15 € ou moins d'argent de poche, et l'autre moitié 15 € ou plus.

## Exercice 16 :

Voici une série de valeurs dont les effectifs sont donnés dans le tableau suivant :

| Valeurs | 9 | 9,5 | **10** | 10,5 | 11 | 11,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 13 | 26 | 52 | 39 | 13 | $x$ |
| ECC | **13** | **39** | **91** | **130** | **143** | $\mathbf{143+x}$ |
| Rangs | **1 à 13** | **14 à 39** | **40 à 91** | **92 à 130** | **131 à 143** | **144 à** $\mathbf{143+x}$ |

**Déterminer une valeur possible de x de telle sorte que la médiane de cette série soit 10.**

Pour que la médiane soit de 10, il faut qu'elle soit comprise entre les rangs 40 et 91. Il faut donc choisir $x$ tel que $143 + x$ soit entre les rangs $40 \times 2 = 80$ et $91 \times 2 - 1 = 182 - 1 = 181$. On peut par exemple prendre $\mathbf{x = 8}$, ainsi l'effectif total est des $143 + 8 = 151$ (**impair**) et donc la médiane se trouve à la $\frac{151+1}{2} = \frac{152}{2} = 76^{\text{ème}}$ position, et vaut donc bien 10 d'après les ECC ci-dessus.
**Remarque : toutes les valeurs de $x$ entre $0$ (ou $1$) et $38$ sont valables.**

## Exercice 17 :

Voici un tableau d'effectifs :

| Valeur | 4 | 7 | 8 | 42 |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 5 | 13 | 12 | 6 |
| ECC | **5** | **18** | **30** | **36** |
| Rangs | **1 à 5** | **6 à 18** | **19 à 30** | **31 à 36** |

1) Calculer la moyenne de cette série :

Moyenne $= \dfrac{4 \times 5 + 7 \times 13 + 8 \times 12 + 42 \times 6}{35} \approx \mathbf{13,1}$

2) Calculer la médiane de cette série :

Il y a 36 valeurs (pair), la médiane est donc entre les $\frac{36}{2} = 18^{\text{ème}}$ et $19^{\text{ème}}$ pos., donc **médiane**$= \frac{7+8}{2} = \mathbf{7,5}$.

3) Comment expliquer la différence entre ces deux valeurs ?

On remarque que la **moyenne (13,1)** est bien plus haute que la **médiane (7,5)**. Cela s'explique par les 6 valeurs « 42 » qui « tirent la moyenne vers le haut », alors que **la médiane n'est pas influencée par les valeurs extrêmes**.

## Exercice 18 :

Voici un tableau d'effectifs :

| Valeur | -55 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 4 | 9 | 11 | 8 |
| ECC | **4** | **13** | **24** | **32** |
| Rangs | **1 à 4** | **5 à 13** | **14 à 24** | **25 à 32** |

1) Calculer la moyenne de cette série :

Moyenne $= \dfrac{-55 \times 4 + 12 \times 9 + 13 \times 11 + 14 \times 8}{32} \approx \mathbf{4,5}$

2) Calculer la médiane de cette série :

Il y a 32 valeurs (pair), la médiane est donc entre les $\frac{32}{2} = 16^{\text{ème}}$ et $17^{\text{ème}}$ positions, donc **médiane**$=$ **13**.

3) Comment expliquer la différence entre ces deux valeurs ?

On remarque que la **moyenne (4,5)** est bien plus basse que la **médiane (13)**. Cela s'explique par les 4 valeurs « -55 » qui « tirent la moyenne vers le bas », alors que **la médiane n'est pas influencée par les valeurs extrêmes**.

# Vers le DNB

☞ **Exercice 19** - ***d'après Métropole Juin 2021 (exercice n°2 - 20 points)*** :

Le Futuroscope est un parc de loisirs situé dans la Vienne. L'année 2019 a enregistré $1{,}9$ million de visiteurs.

1) Combien aurait-il fallu de visiteurs en plus en 2019 pour atteindre 2 millions de visiteurs ?

$2 - 1{,}9 = 0{,}1$

Il aurait donc fallu **$0{,}1$ millions de visiteurs = 100 000 visiteurs** supplémentaires pour atteindre les 2 millions.

2) L'affirmation « Il y a eu environ 5 200 visiteurs par jour en 2019 » est-elle vraie ? Justifier la réponse.

$1{,}9$ millions/365 jours = 1 900 000/365 jours $\approx$ **5 205** donc **l'affirmation est vraie**.

3) Un professeur organise une sortie pédagogique au Futuroscope pour ses élèves de troisième. Il veut répartir les 126 garçons et les 90 filles par groupes. Il souhaite que chaque groupe comporte le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

a. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 126 et 90 :

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

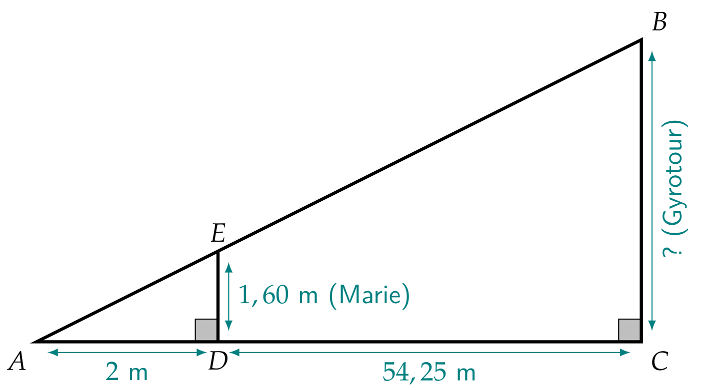
$\mathbf{126 = 2 \times 3^2 \times 7}$ $\qquad$ $\mathbf{90 = 2 \times 3^2 \times 5}$

b. En déduire le plus grand nombre de groupes que le professeur pourra constituer. Combien de filles et de garçons y aura-t-il alors dans chaque groupe ?

$PGCD(126;90) = 2 \times 3^2 = 18 \quad ; \quad 126 \div 18 = 7 \quad ; \quad 90 \div 18 = 5$

**Il pourra donc constituer au maximum 18 groupes comprenant chacun 5 filles et 7 garçons.**

4) Deux élèves de $3^e$, Marie et Adrien, se souviennent avoir vu en mathématiques que les hauteurs inaccessibles pouvaient être déterminées avec l'ombre. Ils souhaitent calculer la hauteur du Gyrotour du Futuroscope. Marie se place en $[DE]$ sur la figure ci-dessous, de telle sorte que son ombre coïncide avec celle de la tour. Après avoir effectué plusieurs mesures, Adrien effectue le schéma ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle), sur lequel les points $A$, $E$ et $B$, ainsi que les points $A$, $D$ et $C$ sont alignés. Calculer la hauteur $BC$ de la Gyrotour.




**On sait que :**

- ☞ Les droites $(DE)$ et $(BC)$ sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à la droite $(AC)$ ;
- ☞ Les points $A$, $E$ et $B$, ainsi que les points $A$, $D$ et $C$ sont alignés.

**Donc d'après le théorème de Thalès :**

$$\left(\frac{AE}{AB}\right) = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{donc} \quad \frac{2}{2+54{,}25} = \frac{1{,}60}{BC} \quad \text{donc} \quad \mathbf{BC} = \frac{\mathbf{1{,}60 \times 56{,}25}}{\mathbf{2}} = \mathbf{45\ m}$$

La Gyrotour mesure donc 45 m de haut.

☞ **Exercice 20** - ***d'après Métropole Juin 2022 (exercice n°3 - 20 points)*** :

Une collectionneuse compte ses cartes Pokémon afin de les revendre. Elle possède 252 cartes de type « feu » et 156 cartes de type « terre ».

1) a. Parmi les trois propositions suivantes, laquelle correspond à la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 252 :

| Proposition 1 | Proposition 2 | Proposition 3 |
|---|---|---|
| $2^2 \times 9 \times 7$ | $2 \times 2 \times 3 \times 21$ | $2^2 \times 3^2 \times 7$ |

Il s'agit de la **Proposition 3** car dans la 1, 9 n'est pas un nombre premier et dans la 2, c'est 21 qui ne l'est pas.

b. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre 156.

$$\begin{array}{r|l} 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{156 = 2^2 \times 3 \times 13}$$

2) Elle veut réaliser des paquets identiques, c'est-à-dire contenant chacun le même nombre de cartes « terre » et le même nombre de cartes « feu » en utilisant toutes ses cartes.

a. Peut-elle faire 36 paquets ?

$252 \div 36 = 7$ mais $156 \div 36 \approx 4,333$, donc 156 n'est pas divisible par 36.

Elle **ne pourra donc pas** réaliser 36 paquets.

b. Quel est le nombre maximum de paquets qu'elle peut réaliser ?

$PGCD(252; 156) = 2^2 \times 3 = 12$

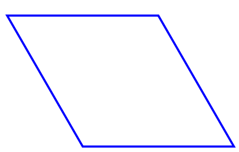
**Elle pourra donc réaliser au maximum 12 paquets de cartes.**

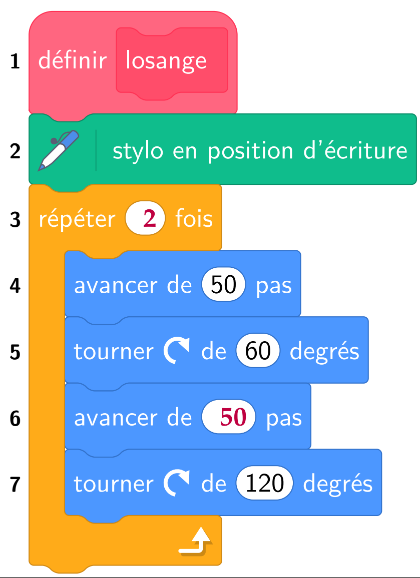
c. Combien de cartes de chaque type contient alors chaque paquet ?

$252 \div 12 = 21$
$156 \div 12 = 13$

**Chaque paquet contient alors 21 cartes « feu » et 13 cartes « terre ».**

☞ **Exercice 21** - ***d'après Métropole Septembre 2023 (exercice n°2 - 14 points)*** :

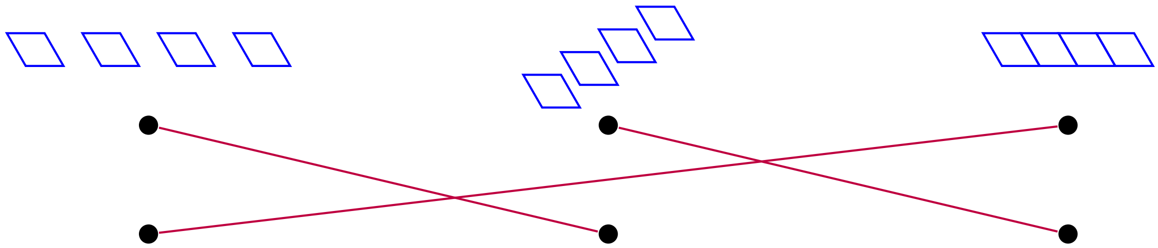




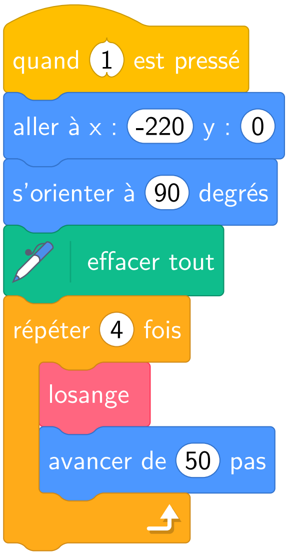

1) On souhaite tracer le losange ci-dessus de côté 50 pas à l'aide du bloc losange.
On a écrit le script ci-contre avec le logiciel Scratch.
Compléter les lignes 3 et 6.

2) Associer chaque figure à son script. Aucune justification n'est demandée.

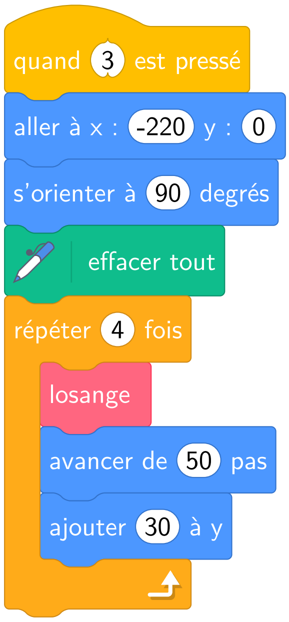
Figure A Figure B Figure C



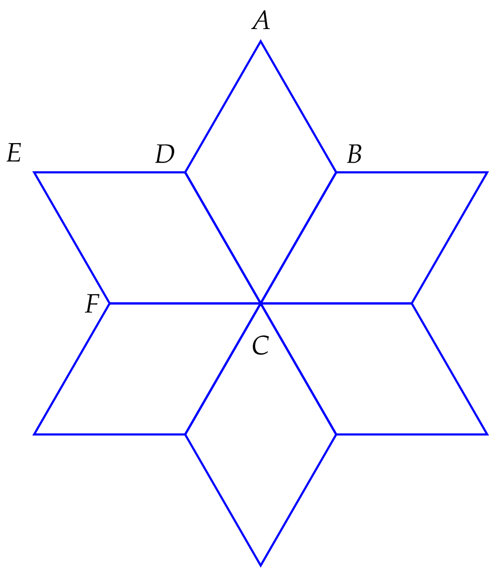
Script 1 Script 2 Script 3

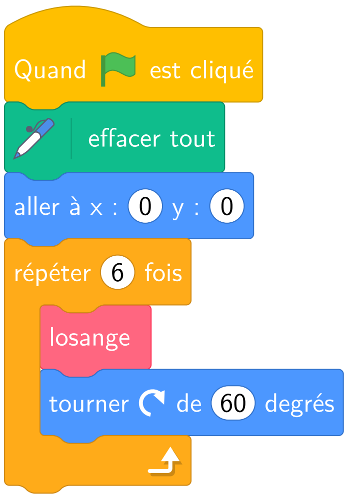







3) Dans la figure ci-dessous obtenue par le programme associé, décrire une transformation qui permet d'obtenir le losange $ABCD$ à partir du losange $EDCF$.
Préciser ses caractéristiques.




La transformation qui transforme $EDCF$ en $ABCD$ est la **rotation de centre C et d'angle 60°.**

## Brouillon