# Calcul et arithmétique

À la fin de ce chapitre…

Je dois **connaître** :

- Les propriétés de calcul littéral
- Les identités remarquables
- Les propriétés de calcul avec des puissances
- Le vocabulaire de l'arithmétique
- Les démonstrations du cours

Je dois **savoir-faire** :

- Simplifier, développer, factoriser
- Utiliser les identités remarquables
- Calculer avec des puissances
- Résoudre des problèmes d'arithmétique

## A) Calcul littéral

### 1. Rappels

**Définition 1 : Vocabulaire du calcul littéral**

- Une **variable** (ou **inconnue**) est une lettre qui représente un nombre.
- Une **expression littérale** est un calcul dans lequel se trouvent des variables.
- **Évaluer une expression littérale**, c'est effectuer le calcul en remplaçant les variables par des nombres donnés.

**Exemple(s) :** $A = 4x(2-x)$ est une expression littérale, dont la variable est . . . .

Évaluer $A$ pour $x = 5$ : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Propriété 1 : Égalité d'expressions littérales**

- Deux expressions littérales sont **égales** si elles donnent le même résultat pour **n'importes quelles valeurs** attribuées à ses variables. Il ne suffit donc pas de tester quelques valeurs pour affirmer que deux expression littérales sont égales !
- Il suffit par contre de trouver un **contre-exemple** pour prouver que deux expressions ne sont pas égales.

**Exemple(s) :**

- Quels que soient les nombres $a$ et $b$, on a toujours $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (voir démonstration dans la partie A)3.).
- Démontrer que $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ :

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Propriété 2 : Priorités opératoires**

Dans une expression littérale, l'ordre des priorités de calcul est le suivant :

1. Les parenthèses
2. Les puissances
3. Les multiplications et les divisions
4. Les additions et les soustractions

**Exemple(s) :** Évaluer les expressions suivantes :

- $A = 14 - 6 \times 2 + 3 =$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
- $B = -1 - 2 \times 3^2 =$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
- $C = -1 - (2 \times 3)^2 =$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
- $D = (7 + (4-3)) - (2-5) =$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .





Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

## 2. Simplifier, réduire, développer et factoriser

### Définition 2 : Transformer une expression littérale

- **Simplifier** une expression littérale consiste à supprimer le signe « $\times$ » lorsqu'il est placé contre une variable ou une parenthèse, et à effectuer les calculs sans variables.
- **Réduire** une expression littérale consiste à regrouper les termes « par famille » (c'est-à-dire les $x$ entre eux, les $x^2$ entre eux, les $y$ entre eux...).
- **Développer** une expression littérale (ou **distribuer** un produit) consiste à transformer un produit $(\times)$ de facteurs en somme $(+)$ de termes.
- **Factoriser** une expression littérale consiste à transformer une somme $(+)$ de termes en produit $(\times)$ de facteurs.

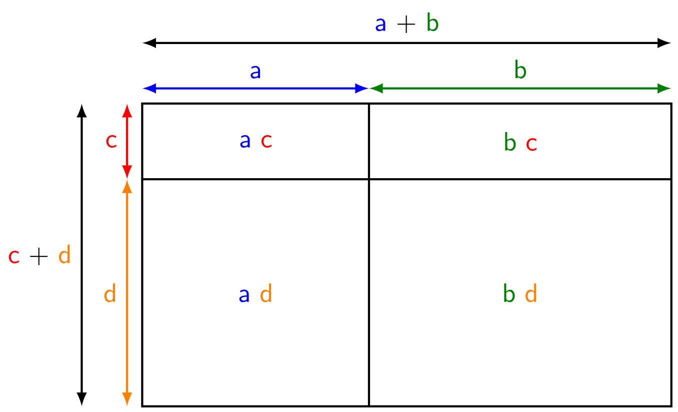
### Propriété 3 : Distributivité simple

Soient $k$, $a$ et $b$ des nombres.

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b \qquad\qquad k \times (a-b) = k \times a - k \times b$$

### Propriété 4 : Distributivité double

Soient $k$, $a$, $b$, $c$ et $d$ des nombres.




Aire du rectangle avec les longueurs des grands côtés :
$\mathcal{A} = (a+b) \times (c+d)$

Aire du rectangle par somme des sous-rectangles :
$\mathcal{A} = a\ c + a\ d + b\ c + b\ d$

D'où l'égalité suivante :

$$(a+b) \times (c+d) = a\ c + a\ d + b\ c + b\ d$$

### Exemple(s) :

1. Développer, simplifier et réduire les expressions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $A = 2(3y+5)$ | $B = (2x+3)(x+8)$ | $C = (x+5)(4x-2)$ |
| $A = \dots\dots\dots$ | $B = \dots\dots\dots$ | $C = \dots\dots\dots$ |
| $A = \dots\dots\dots$ | $B = \dots\dots\dots$ | $C = \dots\dots\dots$ |
| | $B = \dots\dots\dots$ | $C = \dots\dots\dots$ |

2. Factoriser les expressions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $A = 4x - 4y + 8$ | $B = 3t + 9u + 3$ | $C = (x-1)(x+6) - 3(x-1)$ |
| $A = \dots\dots\dots$ | $B = \dots\dots\dots$ | $C = \dots\dots\dots$ |
| $A = \dots\dots\dots$ | $B = \dots\dots\dots$ | $C = \dots\dots\dots$ |





Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

### 3. Identités remarquables

**Propriété 5 : Identités remarquables**

Soient $a$ et $b$ des nombres quelconques. On a alors :

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad \mathbf{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

**Démonstration :**

- $(a+b)^2 =$ ..........................................................................................
- $(a-b)^2 =$ ..........................................................................................
- $(a+b)(a-b) =$ ....................................................................................

**Exemple(s) :**

- Développer : $(y+3)^2 =$ ............................................................................
- Développer : $(2x-7)^2 =$ ..........................................................................
- Factoriser : $x^2 - 25 =$ ...............................................................................

## B) Puissances et racine carrée

### 1. Puissances

**Propriété 6 : Règles de calculs avec les puissances**

Soit $a$ un nombre non nul, $m$ et $p$ des nombres entiers relatifs. Alors :

$$a^1 = a \text{ et } a^0 = 1 \qquad a^m \times a^p = a^{m+p} \qquad \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \qquad (a^m)^p = a^{m\times p}$$

**Exemple(s) :**

$5^1 =$ .................. $7^0 =$ .................. $-2^2 =$ ................. $(-2)^2 =$ .............................

$4^5 \times 4^3 =$ ............. $\dfrac{11^5}{11^2} =$ ................ $\left(9^2\right)^3 =$ ............... $\dfrac{7^2 \times 7^4}{(7^3)^5} =$ ............................

### 2. Racine carrée

**Définition 3 : Racine carrée**

Soit $a$ un nombre **positif**. Alors la **racine carrée** de $a$ est l'unique nombre positif dont le carré est égal à $a$. On la note $\sqrt{a}$ :

$$\text{Pour tout } a \geqslant 0,\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

**Exemple(s) :**

$\sqrt{4} =$ ............... $\sqrt{1} =$ ............... $\sqrt{0} =$ ............... $\sqrt{100} =$ ............ $\sqrt{\quad\quad} = 7$

**Propriété 7 : Calculer avec des racines carrées**

Soient $a$ et $b$ deux nombres positifs. On a alors :

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2. Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3. Si $a$ et $b$ sont strictement positifs, alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

**Exemple(s) :** Simplifier les écritures ci-dessous :

$\left(\sqrt{2}\right)^2 =$ .... $\sqrt{28} =$ ............................ $\sqrt{\dfrac{9}{625}} =$ ..................... $\sqrt{16+25} <$ .......................





Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

**Démonstration :**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## C) Arithmétique

**Définition 4 :** **Divisibilité**

Soient $a$ et $b$ deux nombres **entiers relatifs**. On dit que $a$ est un **diviseur de** $b$ lorsqu'il existe un nombre entier relatif $k$ tel que $b = k \times a$. On peut aussi dire :

« $b$ est un multiple de $a$ » « $a$ divise $b$ » « $b$ est divisible par $a$ » « $b$ est dans la table de $a$ »

**Exemple(s) :**

- 3 est un diviseur de 36 car $36 = 12 \times 3$ ;
- 28 est un multiple de 7 car $28 = 4 \times 7$ ;
- 5 divise 65 car $65 = 13 \times 5$ ;
- 54 est divisible par 6 car $54 = 9 \times 6$.

**Propriété 8 :**

La somme de deux multiples de $a$ est un multiple de $a$.

**Démonstration :**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Définition 5 :** **Parité**

Soit $a$ un nombre entier relatif. On dit que :

- $a$ est **pair** s'il est divisible par 2, c'est-à-dire s'il existe un entier relatif $q$ tel que $a = 2q$ ;
- $a$ est **impair** s'il n'est pas divisible par 2, c'est-à-dire s'il existe un entier relatif $q$ tel que $a = 2q + 1$.

**Exemple(s) :**

42 est pair car . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ; 37 est impair car . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Propriété 9 :**

Le carré d'un nombre impair est impair.

**Démonstration :**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Remarque : On montre de manière similaire que le carré d'un nombre pair est pair.





Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »