

Fonctions de référence

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- Les définitions des fonctions de référence
- Les courbes représentatives des fonctions de référence
- Les différentes formes d'une fonction polynomiale de degré 2 et le vocabulaire associé
- Les caractéristiques des différentes fonctions de référence

Je dois **savoir-faire** :

- Reconnaître et étudier une fonction affine
- Utiliser les variations d'une fonction valeur absolue pour encadrer
- Reconnaître et étudier une fonction polynomiale de degré 2 : variations, extremum, axe de symétrie, sommet
- Choisir la forme d'une fonction polynomiale de degré 2 la plus adaptée au contexte
- Étudier le signe d'une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous forme factorisée
- Identifier les racines d'une fonction polynomiale de degré 2

A) Rappels sur les fonctions affines

Définition 1 : Fonction affine

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . On dit que f est une fonction **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout nombre x on puisse écrire :

$$f(x) = mx + p$$

On dit alors que :

- m est le **coefficient directeur** de f ;
- p est l'**ordonnée à l'origine** de f .

Cas particuliers :

- Si $p = 0$ (dont $f(x) = mx$), on dit alors que f est **linéaire** ;
- Si $m = 0$ (dont $f(x) = p$), on dit alors que f est **constante**.

Propriété 1 : Représentation graphique des fonctions affines

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées).

Cas particuliers :

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère ;
- La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété 2 :

Soit f une fonction affine de coefficient directeur m , d'ordonnée à l'origine p et de courbe représentative \mathcal{C}_f .

Soit également $A \in \mathcal{C}_f$ et $B \in \mathcal{C}_f$. Alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{et} \quad p = y_A - m \cdot x_A$$

Exemple(s) :

Soit f une fonction affine telle que $f(0) = -5$ et $f(1) = -2$.

1. Quelles sont les caractéristiques de la fonction f ?

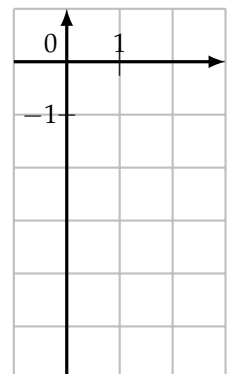
.....

.....

.....

.....

.....



2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-contre.

Propriété 3 : Tableau de variations d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine définie sur \mathbb{R} avec $m \neq 0$. Il y a alors deux possibilités :

$m > 0$

Alors f est **strictement croissante** :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	↗	

$m < 0$

Alors f est **strictement décroissante** :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	↘	

Propriété 4 : Tableau de signes d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine définie sur \mathbb{R} avec $m \neq 0$. On pose $r = -\frac{p}{m}$. Il y a alors deux possibilités :

$m > 0$

Alors f est **strictement croissante** :

x	$-\infty$	r	$+\infty$
Signe de $f(x)$	-	0	+

$m < 0$

Alors f est **strictement décroissante** :

x	$-\infty$	r	$+\infty$
Signe de $f(x)$	+	0	-

Exemple(s) : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. Compléter en justifiant :

Tableau de variations de f :

.....

x	
Variations de f	

Tableau de signes de f :

.....

x	
Signe de $f(x)$	

Exemple(s) : Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (3x + 2)(-1 - 2x)$. Établir son tableau de signes en justifiant :

.....

B) Fonction valeur absolue

Définition 2 : Fonction valeur absolue

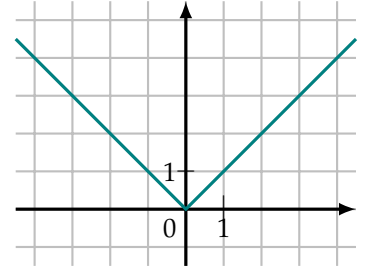
La fonction f définie sur \mathbb{R} est la fonction **valeur absolue** si pour tout réel x on a :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Propriété 5 : Représentation graphique de la fonction valeur absolue

Une fonction valeur absolue est **affine par morceaux**. Ainsi, elle est représentée par deux demi-droites.

C'est une fonction paire, donc sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Propriété 6 : Signe, variations et extremum

Par définition, la fonction valeur absolue est **toujours positive**.

Soit f la fonction valeur absolue. Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f			

Le **minimum** de f sur \mathbb{R} est 0, atteint pour $x = 0$.

Exemple(s) :

En utilisant la représentation graphique de la fonction valeur absolue ci-dessus, résoudre les (in)équations suivantes :

- $|x| = 2$:
- $|x| < 1$:
- $|x| \geq 3$:
- $|x| = -5$:
- $|x| = 0$:

C) Fonctions polynomiales de degré 2

1. Forme développée

Définition 3 : Fonction polynomiale de degré 2

Soit f une fonction à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que f est une **fonction polynomiale de degré 2** s'il existe a , b et c des nombres réels avec $a \neq 0$ tels que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On appelle cette notation la **forme développée de f** .

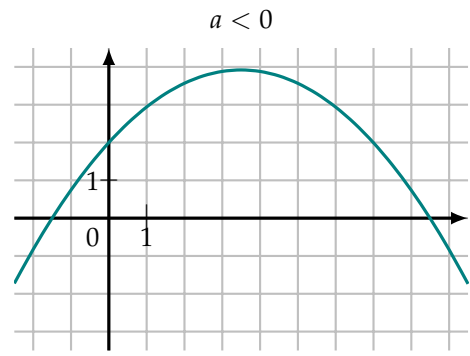
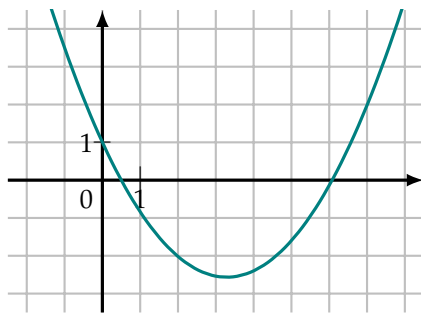
Exemple(s) : Pour chacune des fonctions suivantes, dire s'il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2, et quand c'est le cas, préciser la valeur des coefficients :

- $f_1(x) = (x + 3)(x - 1)$:
- $f_2(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$:
- $f_3(x) = 8x^3 - x^2 - x - 5$:

Propriété 7 : Courbe représentative

La courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 2 est une **parabole**, qui admet un **sommet** (point « le plus haut » si $a < 0$, ou « le plus bas » si $a > 0$, de la courbe) et un **axe de symétrie**.

Selon le signe de a , il y a 2 possibilités :



Propriété 8 :

Si la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ a pour représentation graphique la parabole \mathcal{P} , alors c est l'ordonnée du point d'intersection entre \mathcal{P} et l'axe des ordonnées (c'est l'équivalent de l'ordonnée à l'origine p pour une fonction affine $g(x) = mx + p$).

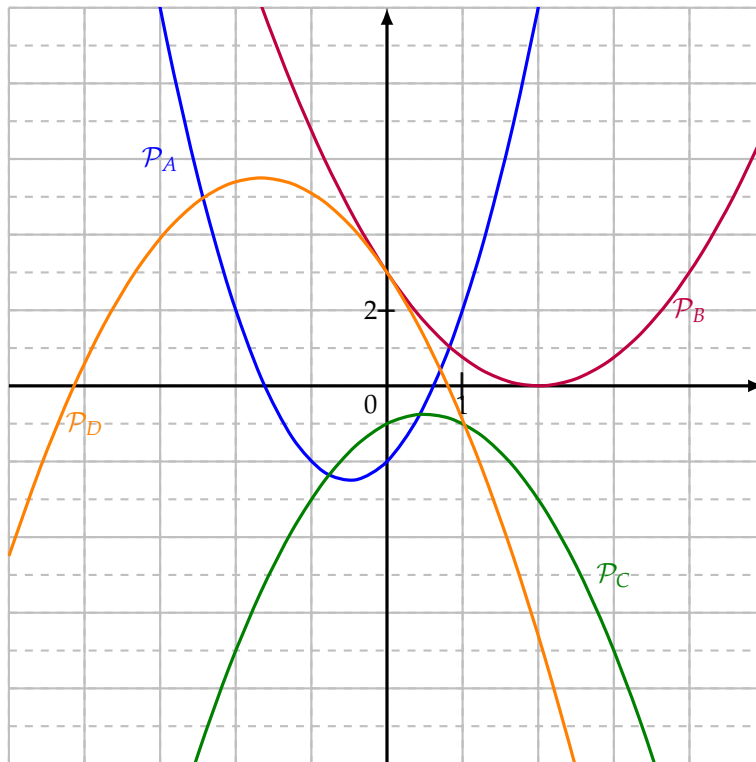
Exemple(s) : On a représenté ci-dessous les courbes représentatives des fonctions suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f_1(x) = 0,75x^2 - 3x + 3$

$f_2(x) = -0,9x^2 - 3x + 3$

$f_3(x) = -x^2 + x - 1$

$f_4(x) = 2x^2 + 2x - 2$



Associer chaque fonction à sa parabole en justifiant :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

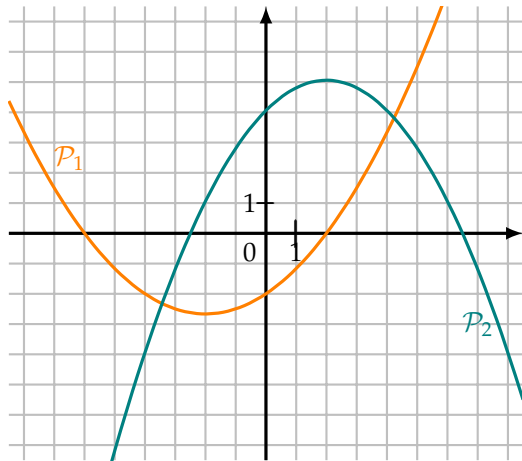
.....

.....

Définition 4 : Racine

On appelle **racine** d'une fonction f polynomiale de degré 2 définie sur I tout nombre $r \in I$ tel que $f(r) = 0$. On dit alors que f admet pour racine r .

Exemple(s) :



On a tracé ci-contre les courbes des fonctions f_1 et f_2 .

- Racines de $f_1(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - 2$, représentée par \mathcal{P}_1 :

.....

.....

.....

- Racines de $f_2(x) = -0,25x^2 + x + 4,0625$, représentée par \mathcal{P}_2 :

.....

.....

.....

2. Forme factorisée : racines et signe

Définition 5 : Forme factorisée

Soit $a, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

est une fonction polynomiale de degré 2. On appelle cette notation la **forme factorisée** de f .

Démonstration :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Attention : toute fonction polynomiale de degré 2 n'admet pas forcément de forme factorisée ! Si l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution, c'est-à-dire si sa courbe représentative \mathcal{P} n'a pas d'intersection avec l'axe des abscisses, alors f n'a pas de forme factorisée !

Exemple(s) : Dire si les fonctions suivantes sont écrites sous forme factorisée, et si oui, donner les coefficients :

- $f(x) = -2(x + 3)(x - 1)$:
- $g(x) = 7(x + 5)^2$:
- $h(x) = x^2 + 1$:
- $g(x) = x^2$:

Propriété 9 : Racines et forme développée

Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$. Alors f admet exactement 2 racines, qui sont r_1 et r_2 .

Exemple(s) :

- La fonction $f(x) = -6(x + 3)(x - 2)$ a pour racines
- La fonction $f(x) = 4(x - 7)^2$ a pour racines

Propriété 10 : Somme et produit de racines, lien avec la forme développée

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$, qui admet pour racines r_1 et r_2 . On a alors :

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Ce résultat découle directement de la démonstration de la définition de la forme factorisée.

Exemple(s) : Dans l'exemple de la définition des racines, on avait la fonction $f_1(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - 2$ qui avait pour racines $r_1 = -6$ et $r_2 = 2$:

.....

.....

Remarque : Il faut être capable de trouver des racines dans les cas suivants :

- La fonction est sous forme factorisée ;
- Si $b = 0$ ou $c = 0$;
- Si l'une des racines est donnée (notamment en utilisant la propriété ci-dessus) ;
- Si l'une des racines est « évidente », à savoir si c'est 0, 1, -1...

Propriété 11 : Tableau de signes d'une fonction polynomiale de degré 2

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 définie sur \mathbb{R} de forme factorisée $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$. Son tableau de signes est alors le suivant :

x	$-\infty$		r_1		r_2	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple(s) : Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$. Compléter son tableau de signes :

x	
$x + 1$	
$x - 3$	
$(x + 1)(x - 3)$	
$f(x)$	

3. Forme canonique : variations et extremum

Propriété 12 : Forme canonique

Soient $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$. Alors la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

est une fonction polynomiale de degré 2. On appelle cette notation la **forme canonique** de f .

Démonstration :

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété 13 :

À la différence de la forme factorisée, **toute fonction polynomiale de degré 2 admet forcément une forme canonique.**

Remarque : La démonstration de cette propriété sera faite dans la séquence 3 (ainsi que la méthode pour obtenir la forme canonique à partir de la forme développée).

Exemple(s) : Donner les coefficients a , α et β des fonctions suivantes sous forme canonique :

- $f_1(x) = -2(x - 9)^2 + 3$:
- $f_1(x) = (x + 7)^2 - 2$:

Propriété 14 : Extremum d'une fonction polynomiale de degré 2

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous sa forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. On note \mathcal{P} sa courbe représentative. Alors \mathcal{P} est une parabole de **sommet** $S(\alpha, \beta)$ et d'**axe de symétrie** la droite d'équation $x = \alpha$.

Propriété 15 : Tableau de variations d'une fonction polynomiale de degré 2

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous sa forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Deux cas sont possibles :

$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f			

$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f			

Exemple(s) :

$$f(x) = 5(x + 3)^2 - 2$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple(s) :

$$g(x) = -3x^2 + 12x - 5$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....