

# Fonctions de référence

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- Les définitions des fonctions de référence
- Les courbes représentatives des fonctions de référence
- Les différentes formes d'une fonction polynomiale de degré 2 et le vocabulaire associé
- Les caractéristiques des différentes fonctions de référence

Je dois **savoir-faire** :

- Reconnaître et étudier une fonction affine
- Utiliser les variations d'une fonction valeur absolue pour encadrer
- Reconnaître et étudier une fonction polynomiale de degré 2 : variations, extremum, axe de symétrie, sommet
- Choisir la forme d'une fonction polynomiale de degré 2 la plus adaptée au contexte
- Étudier le signe d'une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous forme factorisée
- Identifier les racines d'une fonction polynomiale de degré 2

## A) Rappels sur les fonctions affines

### Définition 1 : Fonction affine

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est une fonction **affine** lorsqu'il existe deux réels  $m$  et  $p$  tels que, pour tout nombre  $x$  on puisse écrire :

$$f(x) = mx + p$$

On dit alors que :

- $m$  est le **coefficient directeur** de  $f$  ;
- $p$  est l'**ordonnée à l'origine** de  $f$ .

Cas particuliers :

- Si  $p = 0$  (dont  $f(x) = mx$ ), on dit alors que  $f$  est **linéaire** ;
- Si  $m = 0$  (dont  $f(x) = p$ ), on dit alors que  $f$  est **constante**.

### Propriété 1 : Représentation graphique des fonctions affines

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées).

Cas particuliers :

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère ;
- La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

### Propriété 2 :

Soit  $f$  une fonction affine de coefficient directeur  $m$ , d'ordonnée à l'origine  $p$  et de courbe représentative  $\mathcal{C}_f$ .

Soit également  $A \in \mathcal{C}_f$  et  $B \in \mathcal{C}_f$ . Alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{et} \quad p = y_A - m \cdot x_A$$

### Exemple(s) :

Soit  $f$  une fonction affine telle que  $f(0) = -5$  et  $f(1) = -2$ .

1. Quelles sont les caractéristiques de la fonction  $f$  ?

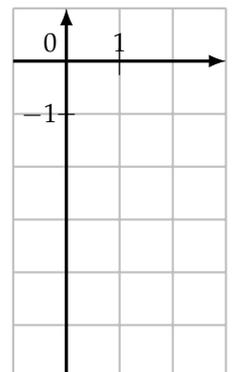
.....

.....

.....

.....

.....



2. Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le repère ci-contre.

**Propriété 3 : Tableau de variations d'une fonction affine**

Soit  $f(x) = mx + p$  une fonction affine définie sur  $\mathbb{R}$  avec  $m \neq 0$ . Il y a alors deux possibilités :

$m > 0$

Alors  $f$  est **strictement croissante** :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $f$	↗	

$m < 0$

Alors  $f$  est **strictement décroissante** :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $f$	↘	

**Propriété 4 : Tableau de signes d'une fonction affine**

Soit  $f(x) = mx + p$  une fonction affine définie sur  $\mathbb{R}$  avec  $m \neq 0$ . On pose  $r = -\frac{p}{m}$ . Il y a alors deux possibilités :

$m > 0$

Alors  $f$  est **strictement croissante** :

$x$	$-\infty$	$r$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	-	0	+

$m < 0$

Alors  $f$  est **strictement décroissante** :

$x$	$-\infty$	$r$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	+	0	-

**Exemple(s) :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ . Compléter en justifiant :

Tableau de variations de  $f$  :

.....  
 .....

$x$	
Variations de $f$	

Tableau de signes de  $f$  :

.....  
 .....

$x$	
Signe de $f(x)$	

**Exemple(s) :** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (3x + 2)(-1 - 2x)$ . Établir son tableau de signes en justifiant :

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

## B) Fonction valeur absolue

### Définition 2 : Fonction valeur absolue

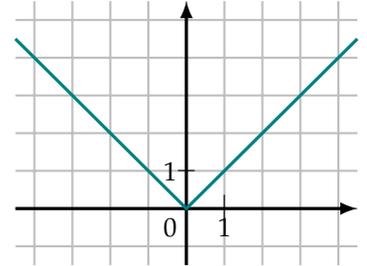
La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est la fonction **valeur absolue** si pour tout réel  $x$  on a :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

### Propriété 5 : Représentation graphique de la fonction valeur absolue

Une fonction valeur absolue est **affine par morceaux**. Ainsi, elle est représentée par deux demi-droites.

C'est une fonction paire, donc sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



### Propriété 6 : Signe, variations et extremum

Par définition, la fonction valeur absolue est **toujours positive**.

Soit  $f$  la fonction valeur absolue. Son tableau de variations est le suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Variations de $f$			

Le **minimum** de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est 0, atteint pour  $x = 0$ .

### Exemple(s) :

En utilisant la représentation graphique de la fonction valeur absolue ci-dessus, résoudre les (in)équations suivantes :

- $|x| = 2$  : .....
- $|x| < 1$  : .....
- $|x| \geq 3$  : .....
- $|x| = -5$  : .....
- $|x| = 0$  : .....

## C) Fonctions polynomiales de degré 2

### 1. Forme développée

#### Définition 3 : Fonction polynomiale de degré 2

Soit  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est une **fonction polynomiale de degré 2** s'il existe  $a$ ,  $b$  et  $c$  des nombres réels avec  $a \neq 0$  tels que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On appelle cette notation la **forme développée** de  $f$ .

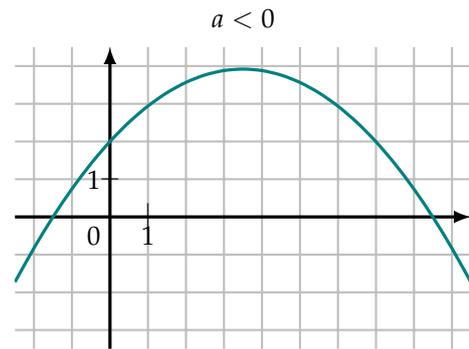
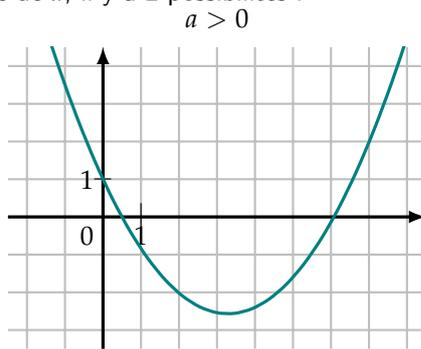
**Exemple(s) :** Pour chacune des fonctions suivantes, dire s'il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2, et quand c'est le cas, préciser la valeur des coefficients :

- $f_1(x) = (x + 3)(x - 1)$  : .....
- $f_2(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  : .....
- $f_3(x) = 8x^3 - x^2 - x - 5$  : .....

**Propriété 7 : Courbe représentative**

La courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 2 est une **parabole**, qui admet un **sommet** (point « le plus haut » si  $a < 0$ , ou « le plus bas » si  $a > 0$ , de la courbe) et un **axe de symétrie**.

Selon le signe de  $a$ , il y a 2 possibilités :

**Propriété 8 :**

Si la fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  a pour représentation graphique la parabole  $\mathcal{P}$ , alors  $c$  est l'ordonnée du point d'intersection entre  $\mathcal{P}$  et l'axe des ordonnées (c'est l'équivalent de l'ordonnée à l'origine  $p$  pour une fonction affine  $g(x) = mx + p$ ).

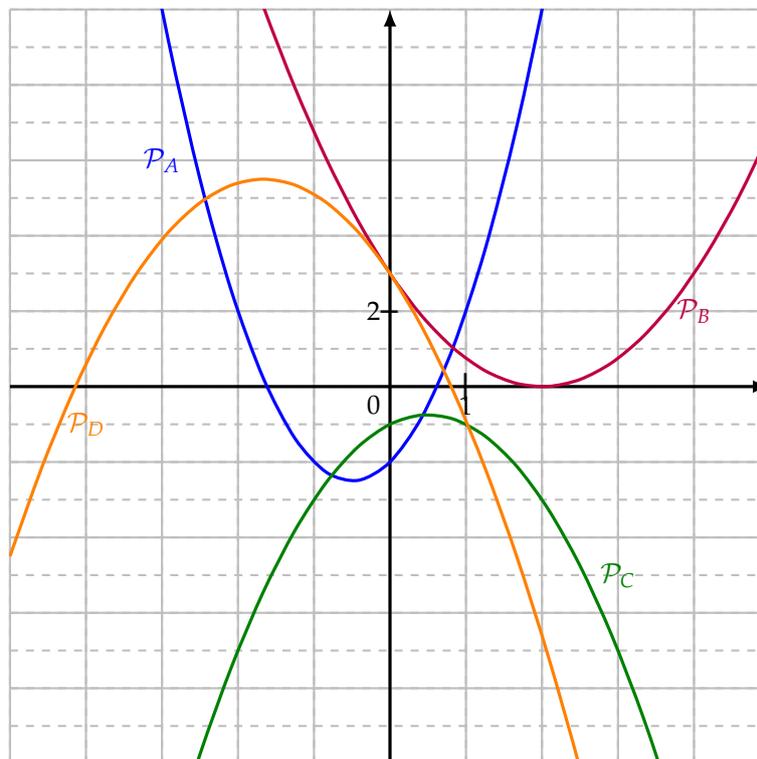
**Exemple(s) :** On a représenté ci-dessous les courbes représentatives des fonctions suivantes, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f_1(x) = 0,75x^2 - 3x + 3$$

$$f_2(x) = -0,9x^2 - 3x + 3$$

$$f_3(x) = -x^2 + x - 1$$

$$f_4(x) = 2x^2 + 2x - 2$$



Associer chaque fonction à sa parabole en justifiant :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

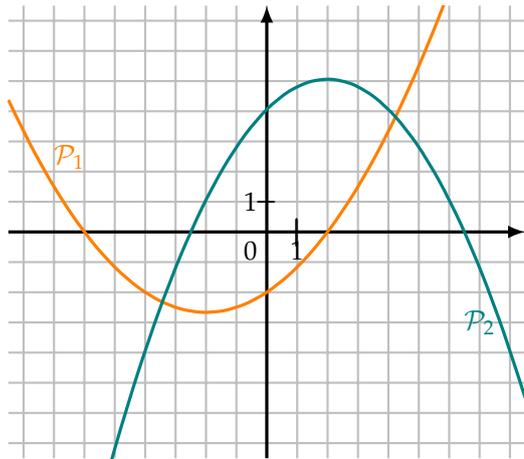
.....

.....

**Définition 4 : Racine**

On appelle **racine** d'une fonction  $f$  polynomiale de degré 2 définie sur  $I$  tout nombre  $r \in I$  tel que  $f(r) = 0$ . On dit alors que  $f$  admet pour racine  $r$ .

**Exemple(s) :**



On a tracé ci-contre les courbes des fonctions  $f_1$  et  $f_2$ .

- Racines de  $f_1(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - 2$ , représentée par  $\mathcal{P}_1$  :

.....  
 .....  
 .....

- Racines de  $f_2(x) = -0,25x^2 + x + 4,0625$ , représentée par  $\mathcal{P}_2$  :

.....  
 .....  
 .....

**2. Forme factorisée : racines et signe**

**Définition 5 : Forme factorisée**

Soit  $a, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ . Alors la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

est une fonction polynomiale de degré 2. On appelle cette notation la **forme factorisée** de  $f$ .

**Démonstration :**

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**Attention : toute fonction polynomiale de degré 2 n'admet pas forcément de forme factorisée !** Si l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution, c'est-à-dire si sa courbe représentative  $\mathcal{P}$  n'a pas d'intersection avec l'axe des abscisses, alors  $f$  n'a pas de forme factorisée !

**Exemple(s) :** Dire si les fonctions suivantes sont écrites sous forme factorisée, et si oui, donner les coefficients :

- $f(x) = -2(x + 3)(x - 1)$  : .....
- $g(x) = 7(x + 5)^2$  : .....
- $h(x) = x^2 + 1$  : .....
- $g(x) = x^2$  : .....

**Propriété 9 : Racines et forme développée**

Soit  $g$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $g(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ . Alors  $f$  admet exactement 2 racines, qui sont  $r_1$  et  $r_2$ .

**Exemple(s) :**

- La fonction  $f(x) = -6(x + 3)(x - 2)$  a pour racines .....
- La fonction  $f(x) = 4(x - 7)^2$  a pour racines .....

**Propriété 10 : Somme et produit de racines, lien avec la forme développée**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , qui admet pour racines  $r_1$  et  $r_2$ . On a alors :

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Ce résultat découle directement de la démonstration de la définition de la forme factorisée.

**Exemple(s) :** Dans l'exemple de la définition des racines, on avait la fonction  $f_1(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - 2$  qui avait pour racines  $r_1 = -6$  et  $r_2 = 2$  :

.....

.....

Remarque : Il faut être capable de trouver des racines dans les cas suivants :

- La fonction est sous forme factorisée ;
- Si  $b = 0$  ou  $c = 0$  ;
- Si l'une des racines est donnée (notamment en utilisant la propriété ci-dessus) ;
- Si l'une des racines est « évidente », à savoir si c'est 0, 1, -1...

**Propriété 11 : Tableau de signes d'une fonction polynomiale de degré 2**

Soit  $f$  une fonction polynomiale de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  de forme factorisée  $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ . Son tableau de signes est alors le suivant :

$x$	$-\infty$		$r_1$		$r_2$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de $a$	0	Signe de $-a$	0	Signe de $a$	

**Exemple(s) :** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$ . Compléter son tableau de signes :

$x$	
$x + 1$	
$x - 3$	
$(x + 1)(x - 3)$	
$f(x)$	

**3. Forme canonique : variations et extremum**

**Propriété 12 : Forme canonique**

Soient  $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , avec  $a \neq 0$ . Alors la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

est une fonction polynomiale de degré 2. On appelle cette notation la **forme canonique** de  $f$ .

**Démonstration :**

.....

.....

.....

.....

.....

**Propriété 13 :**

À la différence de la forme factorisée, **toute fonction polynomiale de degré 2 admet forcément une forme canonique.**

Remarque : La démonstration de cette propriété sera faite dans la séquence 3 (ainsi que la méthode pour obtenir la forme canonique à partir de la forme développée).

**Exemple(s) :** Donner les coefficients  $a$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  des fonctions suivantes sous forme canonique :

- $f_1(x) = -2(x - 9)^2 + 3$  : .....
- $f_1(x) = (x + 7)^2 - 2$  : .....

**Propriété 14 : Extremum d'une fonction polynomiale de degré 2**

Soit  $f$  une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous sa forme canonique  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ . On note  $\mathcal{P}$  sa courbe représentative. Alors  $\mathcal{P}$  est une parabole de **sommet**  $S(\alpha, \beta)$  et d'**axe de symétrie** la droite d'équation  $x = \alpha$ .

**Propriété 15 : Tableau de variations d'une fonction polynomiale de degré 2**

Soit  $f$  une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous sa forme canonique  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ . Deux cas sont possibles :

$a < 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
Variations de $f$			

$a > 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
Variations de $f$			

**Exemple(s) :**

$$f(x) = 5(x + 3)^2 - 2$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exemple(s) :**

$$g(x) = -3x^2 + 12x - 5$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....