Fonctions de référence

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- Les définitions des fonctions de référence
- Les courbes représentatives des fonctions de référence
- Les différentes formes d'une fonction polynomiale de degré 2 et le vocabulaire associé
- Les caractéristiques des différentes fonctions de référence

Je dois **savoir-faire** :

- Reconnaître et étudier une fonction affine
- Utiliser les variations d'une fonction valeur absolue pour encadrer
- Reconnaître et étudier une fonction polynomiale de degré 2 : variations, extremum, axe de symétrie, sommet
- Choisir la forme d'une forme d'une fonction polynomiale de degré 2 la plus adaptée au contexte
- Étudier le signe d'une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous forme factorisée
- Identifier les racines d'une fonction polynomiale de degré 2

A) Rappels sur les fonctions affines

Définition 1 : Fonction affine

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction **affine** lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout nombre x on puisse écrire :

$$f(x) = mx + p$$

On dit alors que :

- m est le **coefficient directeur** de f ;
- p est l'**ordonnée à l'origine** de f.

Cas particuliers :

- Si $p = 0$ (dont $f(x) = mx$), on dit alors que f est **linéaire** ;
- Si $m = 0$ (dont $f(x) = p$), on dit alors que f est **constante**.

Propriété 1 : Représentation graphique des fonctions affines

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées).

Cas particuliers :

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère ;
- La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété 2 :

Soit f une fonction affine de coefficient directeur m, d'ordonnée à l'origine p et de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
Soit également $A \in \mathcal{C}_f$ et $B \in \mathcal{C}_f$. Alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{et} \quad p = y_A - m \cdot x_A$$

Exemple(s) :

Soit f une fonction affine telle que $f(0) = -5$ et $f(1) = -2$.

1. Quelles sont les caractéristiques de la fonction f ?

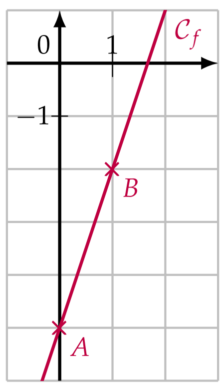
   La courbe représentative de f passe donc par les points $A(0, -5)$ et $B(1, -2)$, d'où :

   (a) Coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-(-5)}{1-0} = \mathbf{3}$

   (b) Ordonnée à l'origine : $p = y_A - m \cdot x_A = -5 - 3 \times 0 = \mathbf{-5}$

   Donc finalement $\mathbf{f(x) = 3x - 5}$

2. Tracer la courbe repréésentative de la fonction f dans le repère ci-contre.



Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 3 : Tableau de variations d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ avec $m \neq 0$. Il y a alors deux possibilités :

$m > 0$

Alors f est **strictement croissante** :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	

$m < 0$

Alors f est **strictement décroissante** :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	

Propriété 4 : Tableau de signes d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ avec $m \neq 0$. On pose $r = -\dfrac{p}{m}$. Il y a alors deux possibilités :

$m > 0$

Alors f est **strictement croissante** :

x	$-\infty$		r		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

$m < 0$

Alors f est **strictement décroissante** :

x	$-\infty$		r		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple(s) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$. Compléter en justifiant :

Tableau de variations de f :

Le coefficient directeur de f est $m = -\dfrac{1}{2} < 0$ donc f est strictement décroissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	

Tableau de signes de f :

$f(x) = 0$ en $r = -\dfrac{p}{m} = -\dfrac{3}{-\frac{1}{2}} = 6$

x	$-\infty$		6		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple(s) : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x+2)(-1-2x)$. Établir son tableau de signes en justifiant :

On remarque que g est le produit de deux fonctions affines. On note :

- $u(x) = 3x + 2$ est strictement croissante ($3 > 0$) et a pour racine $-\dfrac{2}{3}$.
- $v(x) = -1 - 2x$ est strictement décroissante ($-2 < 0$) et a pour racine $-\dfrac{-1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

On peut alors dresser le tableau de signes de chacune de ces fonctions affines et en déduire celui de g :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $u(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $v(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

B) Fonction valeur absolue

Définition 2 : Fonction valeur absolue

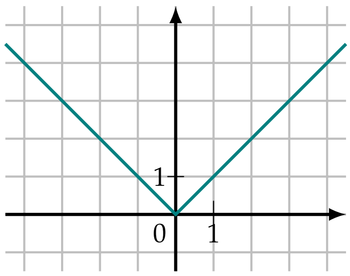
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction **valeur absolue** si pour tout réel x on a :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Propriété 5 : Représentation graphique de la fonction valeur absolue

Une fonction valeur absolue est **affine par morceaux**. Ainsi, elle est représentée par deux demi-droites.

C'est une fonction paire, donc sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Propriété 6 : Signe, variations et extremum

Par définition, la fonction valeur absolue est **toujours positive**.
Soit f la fonction valeur absolue. Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	0	↗

Le **minimum** de f sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint pour $x = 0$.

Exemple(s) :

En utilisant la représentation graphique de la fonction valeur absolue ci-dessus, résoudre les (in)équations suivantes :

- $|x| = 2$: Par lecture graphique, on obtient $x = -2$ ou $x = 2$
- $|x| < 1$: Par lecture graphique, on obtient $x \in]-1;1[$
- $|x| \geqslant 3$: Par lecture graphique, on obtient $x \in]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[$
- $|x| = -5$: cette équation n'a pas de solution, une valeur absolue étant toujours positive.
- $|x| = 0$: Par lecture graphique, on obtient $x = 0$

C) Fonctions polynomiales de degré 2

1. Forme développée

Définition 3 : Fonction polynomiale de degré 2

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est une **fonction polynomiale de degré 2** s'il existe a, b et c des nombres réels avec $a \neq 0$ tels que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On appelle cette notation la **forme développée de** f.

Exemple(s) : Pour chacune des fonctions suivantes, dire s'il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2, et quand c'est le cas, préciser la valeur des coefficients :

- $f_1(x) = (x+3)(x-1)$: développons : $f_1(x) = x^2 + 2x - 3$ donc OUI avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -2$.
- $f_2(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$: on a $f_2(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$ donc NON car $a = 0$, c'est une fonction affine.
- $f_3(x) = 8x^3 - x^2 - x - 5$: NON c'est une fonction polynomiale de degré 3.

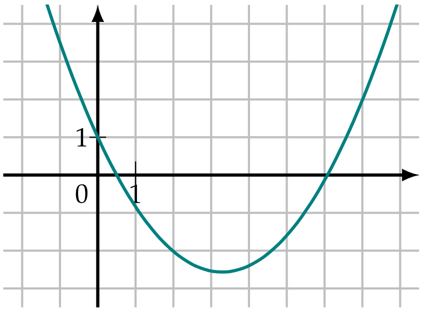
Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 7 : Courbe représentative

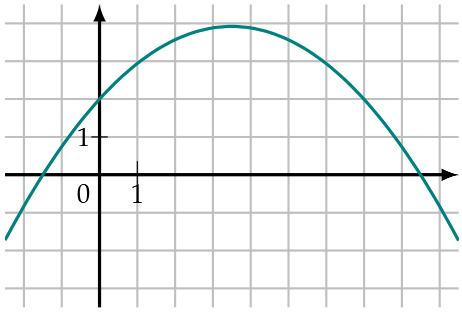
La courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 2 est une **parabole**, qui admet un **sommet** (point « le plus haut » si $a < 0$, ou « le plus bas » si $a > 0$, de la courbe) et un **axe de symétrie**.

Selon le signe de a, il y a 2 possibilités :

$a > 0$



$a < 0$

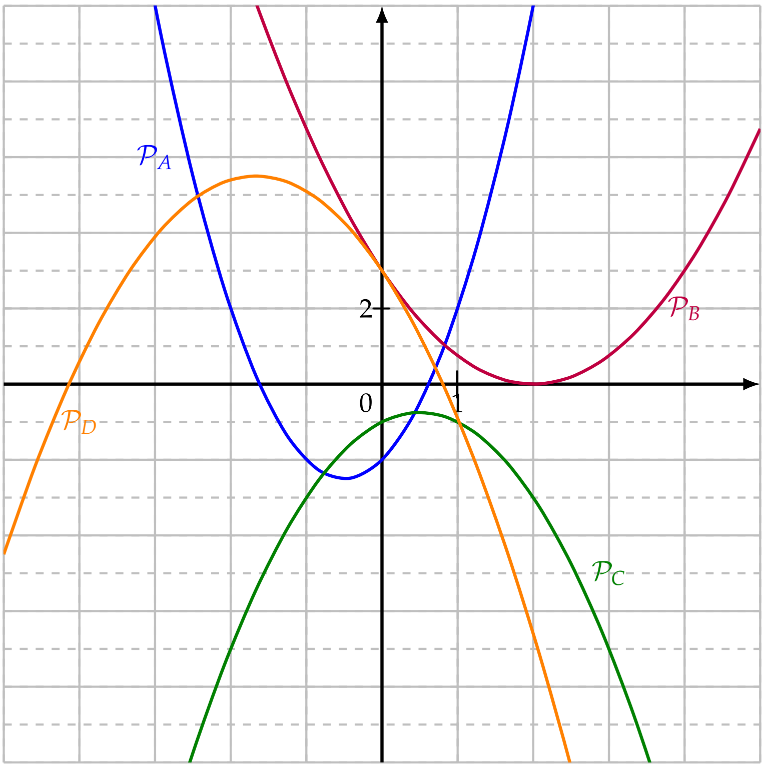


Propriété 8 :

Si la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ a pour représentation graphique la parabole $\mathcal{P}$, alors c est l'ordonnée du point d'intersection entre $\mathcal{P}$ et l'axe des ordonnées (c'est l'équivalent de l'ordonnée à l'origine p pour une fonction affine $g(x) = mx + p$).

Exemple(s) : On a représenté ci-dessous les courbes représentatives des fonctions suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f_1(x) = 0,75x^2 - 3x + 3$ $\quad f_2(x) = -0,9x^2 - 3x + 3$ $\quad f_3(x) = -x^2 + x - 1$ $\quad f_4(x) = 2x^2 + 2x - 2$



Associer chaque fonction à sa parabole en justifiant :

On peut d'abord séparer les fonctions selon le signe de a :
f_1 et f_4 ont $a > 0$, donc correspondent aux paraboles $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$.
f_2 et f_3 ont $a < 0$, donc correspondent aux paraboles $\mathcal{P}_C$ et $\mathcal{P}_D$.

On peut ensuite utiliser le coefficient c :

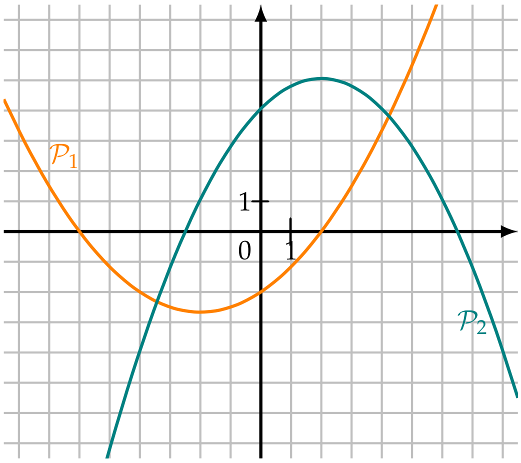
- $f_1(0) = 3$ donc la courbe représentative de f_1 est $\mathcal{P}_B$;
- $f_2(0) = 3$ donc la courbe représentative de f_2 est $\mathcal{P}_D$;
- $f_3(0) = -1$ donc la courbe représentative de f_3 est $\mathcal{P}_C$;
- $f_4(0) = -2$ donc la courbe représentative de f_4 est $\mathcal{P}_A$;

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Définition 4 : Racine

On appelle **racine** d'une fonction f polynomiale de degré 2 définie sur I tout nombre $r \in I$ tel que $f(r) = 0$. On dit alors que f **admet pour racine** r.

Exemple(s) :



On a tracé ci-contre les courbes des fonctions f_1 et f_2.

- Racines de $f_1(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - 2$, représentée par $\mathcal{P}_1$:

  Par lecture graphique, les racines de f_1 sont -6 et 2. On vérifie :
  $f_1(-6) = \frac{1}{6} \times (-6)^2 + \frac{2}{3} \times (-6) - 2 = 0$
  $f_1(2) = \frac{1}{6} \times 2^2 + \frac{2}{3} \times 2 - 2 = 0$

- Racines de $f_2(x) = -0,25x^2 + x + 4,0625$, représentée par $\mathcal{P}_2$:

  Par lecture graphique, les racines de f_2 sont $-2,5$ et $6,5$. On vérifie :
  $f_2(-2,5) = -0,25 \times (-2,5)^2 - 2,5 + 4,0625 = 0$
  $f_2(6,5) = -0,25 \times 6,5^2 + 6,5 + 4,0625 = 0$

2. Forme factorisée : racines et signe

Définition 5 : Forme factorisée

Soit $a, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

est une fonction polynomiale de degré 2. On appelle cette notation la **forme factorisée** de f.

Démonstration :

Soit f définie comme ci-dessus. Développons l'expression :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - r_1)(x - r_2) \\ &= a(x^2 - r_2x - r_1x + r_1r_2) \\ &= a(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2) \\ &= ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2 \end{aligned}$$

On peut alors identifier les coefficients de la forme développée :

$a = a$ $\qquad b = -a(r_1 + r_2)$ $\qquad c = ar_1r_2$

Attention : toute fonction polynomiale de degré 2 n'admet pas forcément de forme factorisée ! Si l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution, c'est-à-dire si sa courbe représentative $\mathcal{P}$ n'a pas d'intersection avec l'axe des abscisses, alors f n'a pas de forme factorisée !

Exemple(s) : Dire si les fonctions suivantes sont écrites sous forme factorisée, et si oui, donner les coefficients :

- $f(x) = -2(x + 3)(x - 1)$: OUI avec $a = -2$, $r_1 = -3$ et $r_2 = 1$.
- $g(x) = 7(x + 5)^2$: OUI avec $a = 7$ et $r_1 = r_2 = -5$.
- $h(x) = x^2 + 1$: NON et elle ne peut pas se factoriser dans $\mathbb{R}$.
- $g(x) = x^2$: OUI avec $a = 1$ et $r_1 = r_2 = 0$.

Propriété 9 : Racines et forme factorisée

Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$. Alors f admet exactement 2 racines, qui sont r_1 et r_2.

Exemple(s) :

- La fonction $f(x) = -6(x + 3)(x - 2)$ a pour racines $r_1 = -3$ et $r_2 = 2$.
- La fonction $f(x) = 4(x - 7)^2$ a pour racines $r_1 = r_2 = 7$.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 10 : Somme et produit de racines, lien avec la forme développée

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, qui admet pour racines r_1 et r_2. On a alors :

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Ce résultat découle directement de la démonstration de la définition de la forme factorisée.

Exemple(s) : Dans l'exemple de la définition des racines, on avait la fonction $f_1(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - 2$ qui avait pour racines $r_1 = -6$ et $r_2 = 2$:

$$r_1 + r_2 = -6 + 2 = -4 \text{ et } -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3} \times \frac{6}{1} = -4 \qquad r_1 r_2 = -6 \times 2 = -12 \text{ et } \frac{c}{a} = -2 \times \frac{6}{1} = -12$$

Remarque : Il faut être capable de trouver des racines dans les cas suivants :

- La fonction est sous forme factorisée ;
- Si $b = 0$ ou $c = 0$;
- Si l'une des racines est donnée (notamment en utilisant la propriété ci-dessus) ;
- Si l'une des racines est « évidente », à savoir si c'est 0, 1, -1...

Propriété 11 : Tableau de signes d'une fonction polynomiale de degré 2

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ de forme factorisée $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$. Son tableau de signes est alors le suivant :

x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple(s) : Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x+1)(x-3)$. Compléter son tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Forme canonique : variations et extremum

Propriété 12 : Forme canonique

Soient $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$. Alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

est une fonction polynomiale de degré 2. On appelle cette notation la **forme canonique** de f.

Démonstration :

On développe à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta \\ &= ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta \end{aligned}$$

Puis on identifie les coefficients de la forme développée :

$$a = a \qquad\qquad b = -2a\alpha \qquad\qquad c = a\alpha^2 + \beta$$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 13 :

À la différence de la forme factorisée, **toute fonction polynomiale de degré 2 admet forcément une forme canonique**.

Remarque : La démonstration de cette propriété sera faite dans la séquence 3 (ainsi que la méthode pour obtenir la forme canonique à partir de la forme développée).

Exemple(s) :

Donner les coefficients a, α et β des fonctions suivantes sous forme canonique :

- $f_1(x) = -2(x-9)^2 + 3$: $a = -2$, $\alpha = 9$ et $\beta = 3$
- $f_1(x) = (x+7)^2 - 2$: $a = 1$, $\alpha = -7$ et $\beta = -2$

Propriété 14 : Extremum d'une fonction polynomiale de degré 2

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative. Alors $\mathcal{P}$ est une parabole de **sommet** $S(\alpha, \beta)$ et d'**axe de symétrie** la droite d'équation $x = \alpha$.

Propriété 15 : Tableau de variations d'une fonction polynomiale de degré 2

Soit f une fonction polynomiale de degré 2 donnée sous sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Deux cas sont possibles :

$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		↘	β	↗	

$a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		↗	β	↘	

Exemple(s) :

$$f(x) = 5(x+3)^2 - 2$$

f est représentée par une parabole $\mathcal{P}$ de sommet $S(-3, 2)$ et d'axe de symétrie $x = -3$.
Son tableau de variations est le suivant ($a = 5 > 0$) :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Variations de f		↘	2	↗	

Exemple(s) :

$$g(x) = -3x^2 + 12x - 5$$

Il faut d'abord la mettre sous forme canonique :

$$\begin{aligned} g(x) &= -3(x^2 - 4x) - 5 \\ &= -3(x^2 - 4x + 4 - 4) - 5 \\ &= -3(x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2) + 12 - 5 \\ &= -3(x-2)^2 + 7 \end{aligned}$$

g est représentée par une parabole $\mathcal{P}$ de sommet $S(2, 7)$ et d'axe de symétrie $x = 2$.
Son tableau de variations est le suivant ($a = -3 < 0$) :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de f		↗	7	↘	

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »