Calcul et arithmétique

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :	Je dois **savoir-faire** :
• Les propriétés de calcul littéral	• Simplifier, développer, factoriser
• Les identités remarquables	• Utiliser les identités remarquables
• Les propriétés de calcul avec des puissances	• Calculer avec des puissances
• Le vocabulaire de l'arithmétique	• Résoudre des problèmes d'arithmétique
• Les démonstrations du cours	

A) Calcul littéral

1. Rappels

Définition 1 : Vocabulaire du calcul littéral

- Une **variable** (ou **inconnue**) est une lettre qui représente un nombre.
- Une **expression littérale** est un calcul dans lequel se trouvent des variables.
- **Évaluer une expression littérale**, c'est effectuer le calcul en remplaçant les variables par des nombres donnés.

Exemple(s) : $A = 4x(2-x)$ est une expression littérale, dont la variable est x.

Évaluer A pour $x = 5$: $4 \times 5 \times (2-5) = 20 \times (-3) = \mathbf{-60}$

Propriété 1 : Égalité d'expressions littérales

- Deux expressions littérales sont **égales** si elles donnent le même résultat pour **n'importes quelles valeurs** attribuées à ses variables. Il ne suffit donc pas de tester quelques valeurs pour affirmer que deux expression littérales sont égales !
- Il suffit par contre de trouver un **contre-exemple** pour prouver que deux expressions ne sont pas égales.

Exemple(s) :

- Quels que soient les nombres a et b, on a toujours $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (voir démonstration dans la partie `A)3.`).
- Démontrer que $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$:

Si l'on prend par exemple $a = 2$ et $b = 5$, alors :

$(a+b)^2 = (2+5)^2 = 7^2 = \mathbf{49}$ alors que $a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = \mathbf{29}$

Propriété 2 : Priorités opératoires

Dans une expression littérale, l'ordre des priorités de calcul est le suivant :

1. Les parenthèses
2. Les puissances
3. Les multiplications et les divisions
4. Les additions et les soustractions

Exemple(s) : Évaluer les expressions suivantes :

- $A = 14 - \underline{6 \times 2} + 3 = \underline{14 - 12} + 3 = 2 + 3 = \mathbf{5}$
- $B = -1 - 2 \times \underline{3^2} = -1 - \underline{2 \times 9} = -1 - 18 = \mathbf{-19}$
- $C = -1 - (\underline{2 \times 3})^2 = -1 - \underline{6^2} = -1 - 36 = \mathbf{-37}$
- $D = (7 + (\underline{4-3})) - (2-5) = \underline{(7+1)} - \underline{(2-5)} = 8 \underline{-(-} 3) = 8 + 3 = \mathbf{11}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

2. Simplifier, réduire, développer et factoriser

Définition 2 : Transformer une expression littérale

- **Simplifier** une expression littérale consiste à supprimer le signe « $\times$ » lorsqu'il est placé contre une variable ou une parenthèse, et à effectuer les calculs sans variables.
- **Réduire** une expression littérale consiste à regrouper les termes « par famille » (c'est-à-dire les x entre eux, les x^2 entre eux, les y entre eux...).
- **Développer** une expression littérale (ou **distribuer** un produit) consiste à transformer un produit $(\times)$ de facteurs en somme $(+)$ de termes.
- **Factoriser** une expression littérale consiste à transformer une somme $(+)$ de termes en produit $(\times)$ de facteurs.

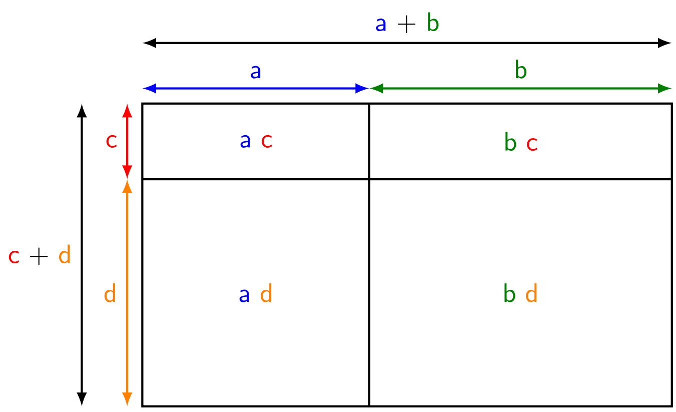
Propriété 3 : Distributivité simple

Soient k, a et b des nombres.

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \qquad\qquad k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Propriété 4 : Distributivité double

Soient k, a, b, c et d des nombres.



Aire du rectangle avec les longueurs des grands côtés :
$\mathcal{A} = (a + b) \times (c + d)$

Aire du rectangle par somme des sous-rectangles :
$\mathcal{A} = a\ c + a\ d + b\ c + b\ d$

D'où l'égalité suivante :

$$(a + b) \times (c + d) = a\ c + a\ d + b\ c + b\ d$$

Exemple(s) :

1. Développer, simplifier et réduire les expressions suivantes :

$A = 2(3y + 5)$
$A = 2 \times 3y + 2 \times 5$
$A = \mathbf{6y + 10}$

$B = (2x + 3)(x + 8)$
$B = 2x \times x + 2x \times 8 + 3 \times x + 3 \times 8$
$B = 2x^2 + 16x + 3x + 24$
$B = \mathbf{2x^2 + 19x + 24}$

$C = (x + 5)(4x - 2)$
$C = x \times 4x - x \times 2 + 5 \times 4x - 5 \times 2$
$C = 4x^2 - 2x + 20x - 10$
$C = \mathbf{4x^2 + 18x - 10}$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$A = 4x - 4y + 8$
$A = \underline{4 \times} x - \underline{4 \times} y + \underline{4 \times} 2$
$A = \mathbf{4(x - y + 2)}$

$B = 3t + 9u + 3$
$B = \underline{3 \times} t + \underline{3 \times} 3u + \underline{3 \times} 1$
$B = \mathbf{3(t + 3u + 1)}$

$C = \underline{(x - 1)}(x + 6) - 3\underline{(x - 1)}$
$C = (x - 1)(x + 6 - 3)$
$C = \mathbf{(x - 1)(x + 3)}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

3. Identités remarquables

Propriété 5 : Identités remarquables

Soient a et b des nombres quelconques. On a alors :

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 \qquad (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 \qquad (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$$

Démonstration :

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a\times a + a\times b + b\times a + b\times b = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a\times a - a\times b - b\times a + b\times b = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) = a\times a - a\times b + b\times a - b\times b = a^2-ab+ba-b^2 = a^2-b^2$

Exemple(s) :

- Développer : $(y+3)^2 = y^2+2\times 3y+3^2 = \mathbf{y^2+6y+9}$
- Développer : $(2x-7)^2 = (2x)^2 - 2\times 7\times 2x + 7^2 = \mathbf{4x^4 - 28y + 49}$
- Factoriser : $x^2-25 = x^2-5^2 = (\mathbf{x+5})(\mathbf{x-5})$

B) Puissances et racine carrée

1. Puissances

Propriété 6 : Règles de calculs avec les puissances

Soit a un nombre non nul, m et p des nombres entiers relatifs. Alors :

$$a^1 = a \text{ et } a^0 = 1 \qquad a^m \times a^p = a^{m+p} \qquad \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \qquad (a^m)^p = a^{m\times p}$$

Exemple(s) :

$$5^1 = 5 \qquad 7^0 = 1 \qquad -2^2 = -2\times 2 = -4 \qquad (-2)^2 = (-2)\times(-2) = 4$$

$$4^5\times 4^3 = 4^{5+3} = 4^8 \qquad \frac{11^5}{11^2} = 11^{5-2} = 11^3 \qquad \left(9^2\right)^3 = 9^{2\times 3} = 9^6 \qquad \frac{7^2\times 7^4}{(7^3)^5} = \frac{7^{2+4}}{7^{3\times 5}} = \frac{7^6}{7^{15}} = 7^{6-15} = 7^{-9}$$

2. Racine carrée

Définition 3 : Racine carrée

Soit a un nombre **positif**. Alors la **racine carrée** de a est l'unique nombre positif dont le carré est égal à a. On la note $\sqrt{a}$:

$$\text{Pour tout } a \geqslant 0,\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Exemple(s) :

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{1} = 1 \qquad \sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt{100} = 10 \qquad \sqrt{49} = 7$$

Propriété 7 : Calculer avec des racines carrées

Soient a et b deux nombres positifs. On a alors :

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2. Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3. Si a et b sont strictement positifs, alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Exemple(s) : Simplifier les écritures ci-dessous :

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2} \qquad \sqrt{28} = \sqrt{4\times 7} = \sqrt{4}\times\sqrt{7} = \mathbf{2\sqrt{7}} \qquad \sqrt{\frac{9}{625}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{625}} = \frac{3}{25} = 0,12 \qquad \sqrt{16+25} < \sqrt{16}+\sqrt{25} = 4+5 = 9$$

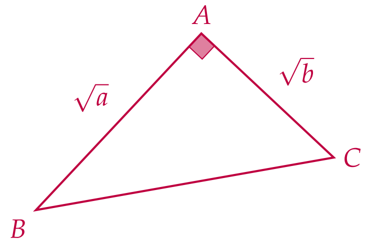
Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Démonstration :

1. a et b sont positifs, donc $ab \geqslant 0$, donc $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$.
   De plus : $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$.
   Ainsi, $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ sont deux nombres positifs qui ont le même carré, ils sont donc égaux.
2. Non requise, même principe que la précédente.
3. On considère le triangle ABC rectangle en A ci-contre.
   D'après le théorème de Pythagore on a :
   $BC^2 = AB^2 + AC^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = a + b$
   D'où : $BC = \sqrt{a+b}$.

   De plus, on sait que les points A, B et C ne sont pas alignés, donc d'après l'inégalité triangulaire on a : $BC < AB + AC$, soit finalement :

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$



C) Arithmétique

Définition 4 : Divisibilité

Soient a et b deux nombres **entiers relatifs**. On dit que a est un **diviseur de** b lorsqu'il existe un nombre entier relatif k tel que $b = k \times a$. On peut aussi dire :

« b est un multiple de a » « a divise b » « b est divisible par a » « b est dans la table de a »

Exemple(s) :

- 3 est un diviseur de 36 car $36 = 12 \times 3$;
- 28 est un multiple de 7 car $28 = 4 \times 7$;
- 5 divise 65 car $65 = 13 \times 5$;
- 54 est divisible par 6 car $54 = 9 \times 6$.

Propriété 8 :

La somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Démonstration :
Soient b et b' deux multiples de a.
Il existe donc deux entiers relatifs k et k' tels que $b = k \times a$ et $b' = k' \times a$.
On a donc $b + b' = k\underline{a} + k'\underline{a} = a(k + k')$ et donc $b + b'$ est aussi un multiple de a.

Définition 5 : Parité

Soit a un nombre entier relatif. On dit que :

- a est **pair** s'il est divisible par 2, c'est-à-dire s'il existe un entier relatif q tel que $a = 2q$;
- a est **impair** s'il n'est pas divisible par 2, c'est-à-dire s'il existe un entier relatif q tel que $a = 2q + 1$.

Exemple(s) :

42 est pair car $42 = 2 \times 21$;

37 est impair car $37 = 36 + 1 = 2 \times 18 + 1$.

Propriété 9 :

Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration :
Soit a un nombre impair.
Il existe donc un entier relatif q tel que $a = 2q + 1$. Calculons son carré :
$a^2 = (2q+1)^2 = (2q)^2 + 2 \times 2q \times 1 + 1^2 = 4q^2 + 4q + 1$.

On peut ensuite factoriser les deux premiers termes :
$a^2 = \underline{2\times} 2q^2 + \underline{2\times} 2q + 1 = 2(2q^2 + 2q) + 1 = 2k' + 1$ si on pose $k' = 2q^2 + 2q$.

Par définition, a^2 est donc également un nombre impair.
Remarque : On montre de manière similaire que le carré d'un nombre pair est pair.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »