Introduction - suites numériques

Ex 1 Suites explicites

1. Voici les premiers termes d'une suite de nombres :

Suite u	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	...

a) Quel calcul permet de passer d'un terme au suivant ? $\rightarrow$ terme précédent $+3$

b) En déduire les autres termes et compléter le tableau.

c) On note cette suite u. Chaque élément de cette suite est appelée un **terme** de la suite. Le **terme initial** de cette suite est le premier terme (ici -8). On notera $u_0 = -8$.
Suivant cette logique et à l'aide du tableau que tu as rempli, donner les valeurs de u_1, u_3 et u_9 :

$u_1 = -5 \quad ; \quad u_3 = 1 \quad ; \quad u_9 = 19$

d) Comment trouver u_{100} ?

Il faut trouver la **formule explicite** de cette suite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + 3n = \mathbf{-8+3n}$$

On peut donc en déduire le terme recherché : $u_{100} = -8 + 3 \times 100 = \mathbf{292}$

2. Voici une autre suite :

Suite v	$0,125$	$0,25$	$0,5$	1	2	4	8	16	32	64	...

a) Quel calcul permet de passer d'un terme au suivant ? $\rightarrow$ terme précédent $\times 2$

b) En déduire les autres termes et compléter le tableau.

c) Avec le tableau, donner les valeurs de v_0, v_1, v_3 et v_9 :

$v_0 = 0,125 \quad ; \quad v_1 = 0,25 \quad ; \quad v_3 = 1 \quad ; \quad v_9 = 64$

d) Comment trouver v_{20} ?

Il faut trouver la **formule explicite** de cette suite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times 2^n = \mathbf{0,125 \times 2^n}$$

On peut donc en déduire le terme recherché : $v_{20} = 0,125 \times 2 \times 20 = \mathbf{131\ 072}$

e) Pourquoi n'ai-je pas demandé v_{100} cette fois-ci ?

Car l'augmentation est exponentielle (utilisation des puissances), donc la valeur serait très grande ! (de l'ordre de $1,5 \times 10^{29}$)

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Ex 2 Lapins de Fibonacci

D'après Déclic Maths 1re Spécialité (Hachette Éducation), p.138

Dans son ouvrage *Liber Abaci*, Léonard de Pise (v. 1175 - v. 1250), plus connu sous le nom de Fibonacci, cherche à résoudre un problème sur la reproduction de lapins. Il suppose qu'une fois atteint l'âge adulte (lorsqu'il a deux mois), tout couple de lapins se reproduit tous les mois, en donnant naissance à un nouveau couple de bébés lapins.

1. Un mois donné, on isole un couple de nouveaux-nés dans un lieu clos.

a) Combien de couples de lapins a-t-on au bout d'un mois ? De deux mois ? De trois mois ?

Au bout d'un mois, le premier couple n'est pas encore adulte, il n'y a donc toujours qu'**un seul couple** de lapins.

Au bout de deux mois, le premier couple donne naissance à un nouveau couple, ils sont donc **deux couples** de lapins (dont un couple de bébés).

Au bout de trois mois, seul le premier couple est adulte, donc il donne naissance à un nouveau couple, ils sont donc **trois couples** de lapins (dont un tout juste né, et un bébé mais qui sera adulte au prochain mois).

b) Expliquer pourquoi il y aura cinq couples de lapins au quatrième mois :

Au troisième mois, il y a donc un couple adulte, un qui va le devenir, et un nouveau-né. Le mois d'après, ce sont donc 2 des 3 couples qui donnent naissance à des bébés lapins, on passe donc de 3 à 5 couples, répartis ainsi :

- 2 couples adultes
- 1 couple qui sera adulte au prochain mois
- 2 couples nouveaux-nés

c) Expliquer pourquoi il y aura trois nouveaux couples au cinquième mois. Combien y aura-t-il alors de couples en tout ?

Les 3 couples adultes vont engendrer 3 nouveaux couples. Il y aura donc 8 couples en tout, répartis ainsi :

- 3 couples adultes
- 2 couples qui seront adultes au prochain mois
- 3 couples de nouveaux-nés

d) Compléter le tableau suivant :

Mois	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de couples	1	1	2	3	5	8	13

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de couples de lapins au nout du n-ème mois.

a) Compléter :

$$u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 2 \quad ; \quad u_3 = 3 \quad ; \quad u_4 = 5 \quad ; \quad u_5 = 8 \quad ; \quad u_6 = 13$$

3. Comment obtient-on le nombre de couples d'un mois donné ?

En additionnant le nombre de couples du mois précédent avec celui du mois encore précédent.

4. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer u_n en fonction de u_{n-1} et de u_{n-2} : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

5. Combien de couples aura-t-on au bout d'un an ?

En itérant la formule précédente :

- $u_7 = u_6 + u_5 = 13 + 8 = 21$
- $u_8 = u_7 + u_6 = 21 + 13 = 34$
- $u_9 = u_8 + u_7 = 34 + 21 = 55$
- $u_{10} = u_9 + u_8 = 55 + 34 = 89$
- $u_{11} = u_{10} + u_9 = 89 + 55 = 144$
- $u_{12} = u_{11} + u_{10} = 144 + 89 = \mathbf{233}$

Au bout d'un an, il y aura 233 couples de lapins.

6. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de mois le nombre de couples de lapins dépassera 1 000 : 16

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »