Suites numériques

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :	Je dois **savoir-faire** :
• La définition et les notations d'une suite • Les différents modes de génération d'une suite • La représentation des suites • Les suites croissantes, décroissantes et constantes • Les propriétés sur la monotonie des suites • La notion de limite d'une suite	• Calculer les termes d'une suite donnée • Reconnaître le mode de génération d'une suite • Tracer une suite graphiquement • Tracer une suite avec ma calculatrice • Étudier le sens le variation d'une suite • Conjecturer la limite éventuelle d'une suite

A) Définition et premiers exemples

Définition 1 : Suite numérique

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Une **suite numérique** u est une fonction qui associe à tout entier naturel $n \geqslant n_0$ un nombre réel noté u_n ou $u(n)$. On dit alors :

- u_{n_0} est le **premier terme** de la suite ;
- on note la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$;
- pour un entier $k \geqslant n_0$, on dit que u_k est le **terme de rang** ou **d'indice** k.

Remarques :

- Une suite numérique est une **liste infinie et ordonnée** de nombres réels qui sont « numérotés » à l'aide d'entiers naturels ;
- La plupart du temps $n_0 = 0$, voire $n_0 = 1$, mais il peut arriver que l'on démarre plus loin ;
- Le terme qui suit le terme u_n est u_{n+1}, et celui qui le précède est u_{n-1} ;
- Par contre, $u_n + 1$ est le terme u_n auquel on ajoute 1, ne pas le confondre avec u_{n+1} !

Exemple(s) :

1. Soit u la suite des nombres impairs :
   (a) Quel est le terme initial de la suite ? $\rightarrow u_0 = 1$
   (b) Quel est le second terme de la suite ? $\rightarrow u_1 = 3$
   (c) Quel est le terme de rang 3 ? $\rightarrow u_3 = 7$
2. Soit v une suite et $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n-1} = 9{,}4$, $v_n = 4{,}8$ et $v_{n+1} = 3{,}5$:
   (a) Comparer v_{n-1} et $v_n - 1$: $\rightarrow v_{n-1} = \mathbf{9{,}4}$ alors que $v_n - 1 = 4{,}8 - 1 = \mathbf{3{,}8}$
   (b) Comparer v_{n+1} et $v_n + 1$: $\rightarrow v_{n+1} = \mathbf{3{,}5}$ alors que $v_n + 1 = 4{,}8 + 1 = \mathbf{5{,}8}$

B) Modes de génération

Définition 2 : Suite définie de façon explicite

Définir la suite (u_n) de manière **explicite**, c'est définir u_n à l'aide d'une formule dépendant **uniquement de** n. Cela permet de calculer directement n'importe quel terme de la suite.
De manière plus formelle, cela revient à donner une relation de la forme $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

Exemple(s) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n + 1$ est la suite des nombres impairs. Elle est ici définie explicitement :

- $u_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$
- $u_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$
- $u_{20} = 2 \times 20 + 1 = 41$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Définition 3 : Suite définie de façon récurrente

Définir la suite (u_n) de manière **récurrente**, c'est donner la valeur de son **terme initial** ainsi qu'une formule de u_n dépendant des **termes précédents** (et éventuellement aussi de n).

Exemple(s) :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ est la suite des nombres impairs, cette fois-ci écrite de manière récurrente. En effet :
   (a) $u_1 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$
   (b) $u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5$
   (c) $u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7$
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} v_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2v_n - 3 \end{cases}$:
   (a) $v_1 = 2v_0 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$
   (b) $v_2 = 2v_1 - 3 = 2 \times 7 - 3 = 11$
   (c) $v_3 = 2v_2 - 3 = 2 \times 11 - 3 = 19$
3. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} w_0 = 0 \text{ et } w_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 2w_{n+1} + 3w_n + 1 \end{cases}$:
   (a) $w_2 = 2w_1 + 3w_0 + 1 = 2 \times 3 + 3 \times 0 + 1 = 7$
   (b) $w_3 = 2w_2 + 3w_1 + 1 = 2 \times 7 + 3 \times 3 + 1 = 24$
   (c) $w_4 = 2w_3 + 3w_2 + 1 = 2 \times 24 + 3 \times 7 + 1 = 70$
4. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par : $\begin{cases} x_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = 2x_n - 5n \end{cases}$:
   (a) $x_2 = 2x_1 - 5 \times 1 = 2 \times 4 - 5 = 3$
   (b) $x_3 = 2x_2 - 5 \times 2 = 2 \times 3 - 10 = -4$
   (c) $x_4 = 2x_3 - 5 \times 3 = 2 \times (-4) - 15 = -23$

Définition 4 : Suite définie par un algorithme

Plus rarement, on pourra aussi définir une suite à l'aide d'un algorithme, qui permet de calculer tous les termes.

Exemple(s) :

Une très célèbre suite est celle de Syracuse, que l'on peut définir à l'aide de l'algorithme Python suivant :

```python
def syracuse(u0, n):
    # u0 est le premier terme de la suite
    # n est le numéro du terme que l'on cherche
    u = u0
    for i in range(n):
        if u%2 == 0: # Si le terme courant est pair
            u = u/2
        else: # Sinon (terme courant impair)
            u = 3 * u + 1
    return u
```

1. Calculer les 6 premiers termes de la suite si $u_0 = 26$:
   (a) $u_1 = 26 \div 2 = 13$ car $u_0 = 26$ est pair
   (b) $u_2 = 3 \times 13 + 1 = 40$ car $u_1 = 13$ est impair
   (c) $u_3 = 40 \div 2 = 20$ car $u_2 = 40$ est pair
   (d) $u_4 = 20 \div 2 = 10$ car $u_3 = 20$ est pair
   (e) $u_5 = 10 \div 2 = 5$ car $u_4 = 10$ est pair
   (f) $u_6 = 3 \times 5 + 1 = 16$ car $u_5 = 5$ est impair
2. Quelle est la formule de récurrence de cette suite ? → $u_{n+1} = \begin{cases} u_n \div 2 & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

C) Représentation graphique

Définition 5 : Représentation graphique d'une suite numérique

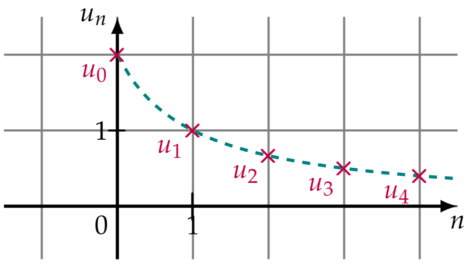
Dans un repère, une suite (u_n) est le **nuage de points** de coordonnées (n, u_n) avec $n \in \mathbb{N}$.

Remarque :

- Pour représenter une suite définie explicitement par $u_n = f(n)$, il suffit de tracer la courbe de f et de prendre les points d'abscisses entières ;
- Pour représenter une suite définie par récurrence, il existe une méthode utilisant la courbe de g si $u_{n+1} = g(u_n)$ et la droite d'équation $y = x$. Nous la verrons dans les exercices.

Exemple(s) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{n+1}$.

On a représenté la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$. Tracer les points de la suite u :



Définition 6 : Sens de variation d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que :

- (u_n) est **croissante** lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$;
- (u_n) est **décroissante** lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$;
- (u_n) est **croissante à partir d'un rang** p lorsque $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} \geqslant u_n$;
- (u_n) est **décroissante à partir d'un rang** p lorsque $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} \leqslant u_n$;
- (u_n) est **constante** (ou **stationnaire**) à partir d'un rang p lorsque $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} = u_n$;

Exemple(s) :

- La suite des nombres impairs est **croissante** ;
- La suite tracée à l'exemple ci-dessus est **décroissante** ;
- La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **ni croissante ni décroissante !** En effet, elle vaut alternativement 1, puis -1, puis 1, puis -1...

Propriété 1 : Sens de variation d'une suite définie de façon explicite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, avec f une fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et $p \in \mathbb{N}$.

- Si la fonction f est **croissante** sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p ;
- Si la fonction f est **décroissante** sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p ;
- Si la fonction f est **constante** sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est **stationnaire** à partir du rang p.

Démonstration :

1er cas uniquement :

Supposons f croissante sur $[p; +\infty[$.

$\forall n \geqslant p$, on a $n+1 \geqslant n (\geqslant p)$, et comme la fonction f est croissante, on a bien :

$$u_{n+1} = f(n+1) \geqslant f(n) = u_n$$

Donc la suite (u_n) est bien croissante à partir du rang p.

Remarques :

- Attention, les réciproques de ces propriétés sont fausses ! Même si la suite est croissante, rien n'oblige la fonction par laquelle on la définit de l'être (entre chaque valeur entière, elle peut « faire n'importe quoi ») ;
- Ces propriétés ne s'appliquent pas aux suites définies par récurrence !

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Méthode 1 : Étudier le sens de variation d'une suite

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), 3 méthodes sont envisageables :

1. Si la suite est définie explicitement, on étudie le sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$;
2. On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:
   - Si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors $u_{n+1} > u_n$ et donc la suite est strictement croissante ;
   - Si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors $u_{n+1} < u_n$ et donc la suite est strictement décroissante ;
   - Si $u_{n+1} - u_n = 0$, alors $u_{n+1} = u_n$ et donc la suite est constante.
3. On compare le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :
   - Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $u_{n+1} > u_n$ et donc la suite est strictement croissante ;
   - Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $u_{n+1} < u_n$ et donc la suite est strictement décroissante ;
   - Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors $u_{n+1} = u_n$ et donc la suite est constante.

Exemple(s) : Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -2n + 6$:

   (u_n) est définie de manière explicite par $u_n = f(n)$ avec f telle que $\forall x \in [0; +\infty[,\ f(x) = -2x + 6$ qui est décroissante sur son intervalle de définition (fonction affine avec $m = -2 < 0$), donc la suite (u_n) est **décroissante**.

2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 1 \end{cases}$:

   $v_{n+1} - v_n = v_n + 2n + 1 - v_n = \mathbf{2n + 1 > 0}$ car $n \in \mathbb{N}$

   Donc $v_{n+1} - v_n > 0$, donc $v_{n+1} > v_n$, donc la suite (v_n) est **croissante**.

D) Notion de limites

L'objectif de cette dernière partie est d'étudier le comportement des suites lorsque n devient « très grand ». On dit alors qu'on étudie la **limite** de la suite lorsque n **tend vers** $+\infty$. Pour le moment, on se contentera de définitions intuitives et de méthodes expérimentales.

Définition 7 : Suite convergente

Soit (u_n) une suite numérique, et l un nombre réel. On dit que « (u_n) **tend vers** l lorsque n tend vers $+\infty$ », ou que « la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ est l » si quand n augmente, les valeurs de u_n se rapprochent de la valeur l. On le note ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Dans ce cas, on dit que (u_n) est une **suite convergente**.

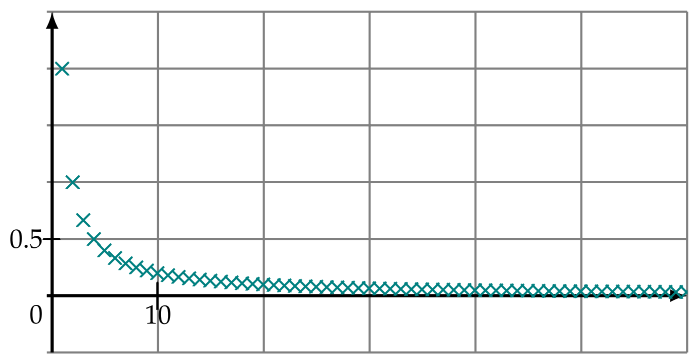
Exemple(s) :

On a tracé ci-contre la suite (u_n) définie pour tout $n > 0$ par :

$$u_n = \frac{2}{n}$$

Que peut-on dire de sa limite ?

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$



Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Définition 8 : Suite divergente

Une suite (u_n) est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Cas particulier : on dit que « (u_n) **tend vers** $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ », ou que « la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ est $+\infty$ » si les valeurs de u_n peuvent être aussi grandes que l'on veut lorsque n est assez grand. On le note ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Exemple(s) :

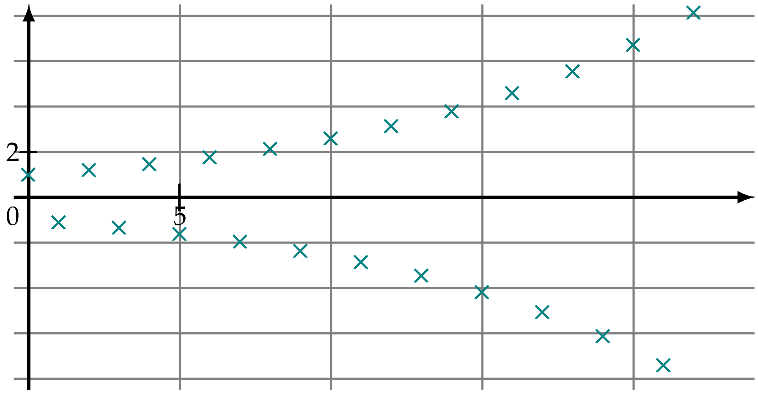
1. Une mise en culture de bactéries voit leur nombre tripler toutes les heures. On note u_n le nombre de bactéries après n heures.

   De manière intuitive, on comprend que si le nombre d'heures n devient très grand, le nombre de bactéries va également devenir arbitrairement grand. On a donc :

   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

   La suite (u_n) est **divergente**.

2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = (-1,1)^n$. Le graphique ci-dessous la représente :



   Le graphique montre une alternance du signe des termes. Ils ne se rapprochent pas d'un nombre réel, donc la suite (v_n) **diverge**.

   Remarque pas du tout au programme : par contre, la sous-suite comprenant les termes d'indices pairs tend vers $+\infty$ et celle contenant les termes d'indice impair tend vers $-\infty$.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »