Géométrie plane

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :	Je dois **savoir-faire** :
• Le théorème de Pythagore • Les relations de trigonométrie • La définition d'un projeté orthogonal	• Calculer une longueur dans un triangle rectangle • Résoudre des problèmes de géométrie en utilisant les propriétés des figures ou un projeté orthogonal • Placer des points et lire des coordonnées dans un repère orthonormé

A) Rappels : Pythagore et trigonométrie

Propriété 1 : Théorème de Pythagore

Le triangle ABC est rectangle en A **si et seulement si** $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exemple(s) :

Calculer la longueur AC du triangle ci-contre :

Le triangle ABC est **rectangle en** A, donc d'après le **théorème de Pythagore** on a :

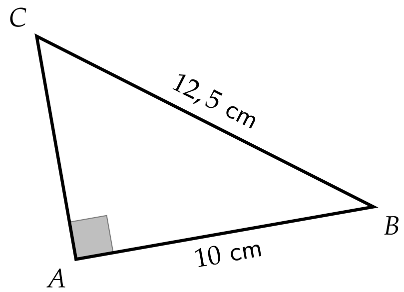
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$12,5^2 = 10^2 + AC^2$$

$$156,25 = 100 + AC^2$$

$$AC^2 = 156,25 - 100 = 56,25$$

$$AC = \sqrt{56,25} = \mathbf{7,5\ cm}$$



Exemple(s) :

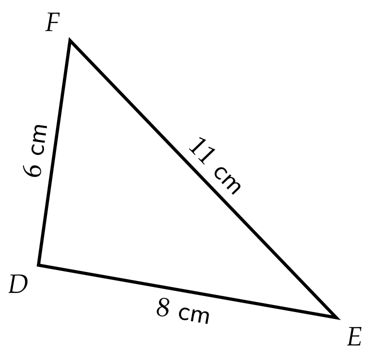
Le triangle DEF ci-contre est-il un triangle rectangle ?

Dans le triangle DEF, $[EF]$ est le côté le plus long. On a alors :

D'une part :
$EF^2 = 11^2$
$EF^2 = \mathbf{121}$

D'autre part :
$DE^2 + DF^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64$
$DE^2 + DF^2 = \mathbf{100}$

On constate que $EF^2 \neq DE^2 + DF^2$ donc **l'égalité de Pythagore** n'est pas vérifiée, donc le triangle DEF n'est pas rectangle.

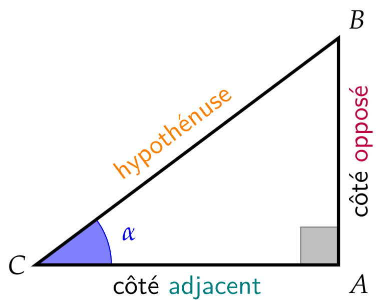


Propriété 2 : Trigonométrie

Soit ABC un triangle rectangle en A. On a alors les relations de trigonométrie suivantes :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{BC} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$$

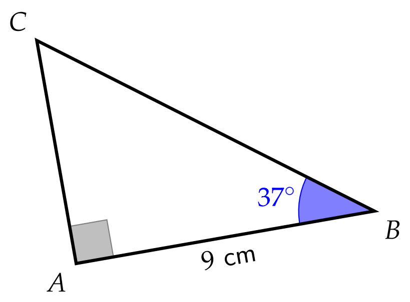
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AB}{AC}$$



Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Exemple(s) :

Calculer la longueur AC du triangle ci-contre :



Dans le triangle ABC **rectangle en** A :

- On connaît AB le côté **adjacent** ;
- On cherche AC, le côté **opposé**.

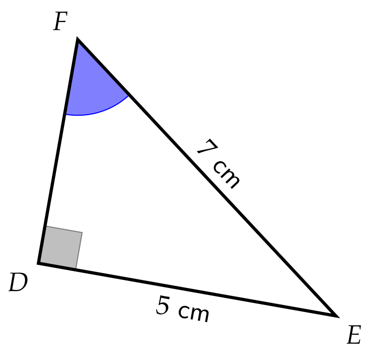
On va donc utiliser la **tangente** :

$$\tan\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AC}{AB} \quad \text{soit} \quad \tan(37^\circ) = \frac{AC}{9}$$

D'où : $AC = 9 \times \tan(37^\circ) \approx \mathbf{6,8\ cm}$

Exemple(s) :

Calculer la valeur de l'angle $\widehat{DFE}$ du triangle ci-contre :



Dans le triangle DEF **rectangle en** D :

- On connaît DE le côté **opposé** ;
- On connaît EF, l'**hypothénuse**.

On va donc utiliser le **sinus** :

$$\sin\left(\widehat{DFE}\right) = \frac{DE}{EF} \quad \text{soit} \quad \tan\left(\widehat{DFE}\right) = \frac{5}{7}$$

D'où : $\widehat{DFE} = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right) \approx \mathbf{45,6^\circ}$

Propriété 3 :

Soit ABC un triangle rectangle en A et α un angle aigu de ce triangle. On a alors les propriétés suivantes :

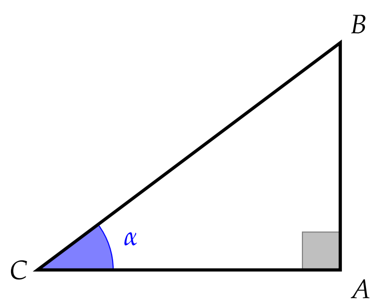
- $0 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$
- $0 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$
- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

Démonstration :

Remarque : Les deux premières inégalités proviennent simplement des définitions de cos et sin et du fait que l'hypothénuse (qui est au dénominateur dans ces deux cas) est toujours le côté le plus grand.

Le triangle ABC est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$



Effectuons ensuite le calcul suivant :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2}$$

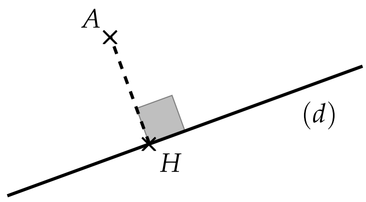
Or en utilisant l'égalité de Pythagore ci-dessus on a alors :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

B) Projeté orthogonal

Définition 1 : Projeté orthogonal d'un point sur une droite



Soit A un point et (d) une droite.

Le **projeté orthogonal** de A sur (d) est le **point d'intersection** de (d) avec la perpendiculaire à (d) passant par A.

Propriété 4 : Distance d'un point à une droite

Soit A un point, (d) une droite et H le projeté orthogonal de A sur (d).

Alors H **est le point de** (d) **le plus proche de** A.

On appelle la longueur AH la **distance** du point A à la droite (d).

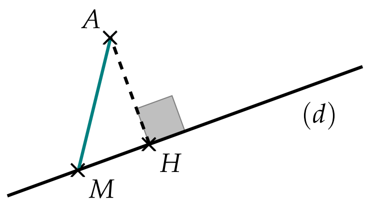
Démonstration :

On pose M un point de (d) distinct du point H. On cherche à montrer que $AH < AM$.

1er cas : Le point A appartient à la droite (d) :

Dans ce cas, A et H sont confondus et $AH = 0$. Or H et M sont distincts donc $AM = MH > 0$.

On a bien $AM > AH$.



2nd cas : Le point A n'appartient pas à la droite (d) :

Alors le triangle AMH est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$AM^2 = AH^2 + MH^2$$

Or M est distinct de H, donc $MH > 0$, donc $MH^2 > 0$.

D'où $AM^2 > AH^2$, soit $AM > AH$.

Dans les deux cas, on a bien montré que $AM > AH$, et ce que que soit le point M de (d) différent de H. Donc H est bien le point de (d) le plus proche de A.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »