Équations du second degré

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- La formule du discriminant d'un trinôme
- L'expression canonique d'un trinôme d'après son déterminant
- L'expression des racines d'un trinôme d'après son déterminant

Je dois **savoir-faire** :

- Résoudre une équation du second degré
- Résoudre une inéquation du second degré
- Factoriser et étudier le signe d'une fonction polynomiale de degré 2
- Mettre sous forme canonique et étudier les variations d'une fonction polynomiale de degré 2
- Déterminer deux nombres réels en connaissant leur somme et leur produit
- Choisir la forme adaptée d'une fonction polynomiale de degré 2 en fonction du problème

Dans ce chapitre on considère f une fonction polynomiale de degré 2 (aussi appelée « trinôme ») définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

A) Discriminant et forme canonique

Définition 1 : Discriminant d'un trinôme

On appelle **discriminant** du trinôme le nombre :

$$\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Exemple(s) : Calculer le discriminant des trinômes suivants :

- $2x^2 + 5x + 3$: ....
- $x^2 - x - 6$: ....
- $x^2 + x + 1$: ....
- $4x^2 - 4x + 1$: ....

Propriété 1 : Forme canonique à partir du discriminant

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \mathbf{a}\left[\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^2 - \frac{\mathbf{\Delta}}{\mathbf{4a^2}}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Ainsi, si l'on pose :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = -\frac{\Delta}{2a}$$

Alors $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est bien la **forme canonique** de f.

Exemple(s) : Quelle est la forme canonique de $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$?

....

....

....

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Démonstration :

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple(s) : Dresser le tableau de variations de la fonction suivante :

$$g(x) = x^2 - 4x + 3$$

....
....
....
....

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

B) Racines et forme factorisée

Propriété 2 : Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Soit f la fonction définie précédemment et Δ son discriminant. On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$. Trois cas sont possibles :

- 1er cas : si $\mathbf{\Delta < 0}$
  Alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet **aucune solution réelle**.
- 2ème cas : si $\mathbf{\Delta = 0}$
  Alors l'équation $f(x) = 0$ admet **une unique solution réelle** : $\mathbf{r = -\frac{b}{2a}}$
- 3ème cas : si $\mathbf{\Delta > 0}$
  Alors l'équation $f(x) = 0$ admet **deux solutions réelles distinctes** :

$$\mathbf{r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \mathbf{r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exemple(s) : Résoudre les (in)équations suivantes :

- $2x^2 + 4x + 2 = 0$:

....

....

....

....

....

....

- $4x^2 - 2x + 5 = 0$:

....

....

....

....

- $2x^2 - x - 6 > 0$:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Démonstration :

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

C) Application

Propriété 3 : Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme et leur produit

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont solution de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Exemple(s) : Trouver la solution de : $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »