Équations du second degré

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- La formule du discriminant d'un trinôme
- L'expression canonique d'un trinôme d'après son déterminant
- L'expression des racines d'un trinôme d'après son déterminant

Je dois **savoir-faire** :

- Résoudre une équation du second degré
- Résoudre une inéquation du second degré
- Factoriser et étudier le signe d'une fonction polynomiale de degré 2
- Mettre sous forme canonique et étudier les variations d'une fonction polynomiale de degré 2
- Déterminer deux nombres réels en connaissant leur somme et leur produit
- Choisir la forme adaptée d'une fonction polynomiale de degré 2 en fonction du problème

Dans ce chapitre on considère f une fonction polynomiale de degré 2 (aussi appelée « trinôme ») définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

A) Discriminant et forme canonique

Définition 1 : Discriminant d'un trinôme

On appelle **discriminant** du trinôme le nombre :

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Exemple(s) : Calculer le discriminant des trinômes suivants :

- $2x^2 + 5x + 3 : \Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = \mathbf{1}$
- $x^2 - x - 6 : \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = \mathbf{25}$
- $x^2 + x + 1 : \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = \mathbf{-3}$
- $4x^2 - 4x + 1 : \Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = \mathbf{0}$

Propriété 1 : Forme canonique à partir du discriminant

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \mathbf{a}\left[\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^2 - \frac{\boldsymbol{\Delta}}{\mathbf{4a^2}}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Ainsi, si l'on pose :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = -\frac{\Delta}{4a}$$

Alors $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est bien la **forme canonique** de f.

Exemple(s) : Quelle est la forme canonique de $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$?

On a : $a = 2$ $\quad b = 5$ $\quad c = -1$

On calcule d'abord le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 25 + 8 = \mathbf{33}$

La forme canonique de f est donc :

$$f(x) = 2\left(x + \frac{5}{2 \times 2}\right)^2 - \frac{33}{4 \times 2} = \mathbf{2}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right)^2 - \frac{\mathbf{33}}{\mathbf{8}}$$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on commence par le mettre en facteur :

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \quad (*)$$

On remarque ensuite que :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Ainsi on a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

En faisant le changement dans $(*)$ on obtient donc :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{\mathbf{4a}c}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= \mathbf{a}\left[\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{\Delta}}{\mathbf{4a^2}}\right] \\
&= \mathbf{a}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{\Delta}}{\mathbf{4a}}
\end{aligned}$$

Exemple(s) : Dresser le tableau de variations de la fonction suivante :

$$g(x) = x^2 - 4x + 3$$

On commence par calculer son discriminant :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = \mathbf{4}$$

On en déduit ensuite sa forme canonique :

$$g(x) = 1 \times \left(x + \frac{-4}{2 \times 1}\right)^2 - \frac{4}{4 \times 1} = (\mathbf{x} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$$

On peut donc en déduire le tableau de variations suivant $(a = 1 > 0)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

B) Racines et forme factorisée

Propriété 2 : Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Soit f la fonction définie précédemment et Δ son discriminant. On veut résoudre l'équation $f(x)=0$. Trois cas sont possibles :

- 1er cas : si $\mathbf{\Delta < 0}$
  Alors l'équation $f(x)=0$ n'admet **aucune solution réelle**.
- 2ème cas : si $\mathbf{\Delta = 0}$
  Alors l'équation $f(x)=0$ admet **une unique solution réelle** : $\mathbf{r = -\frac{b}{2a}}$
- 3ème cas : si $\mathbf{\Delta > 0}$
  Alors l'équation $f(x)=0$ admet **deux solutions réelles distinctes** :

$$\mathbf{r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \mathbf{r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exemple(s) : Résoudre les (in)équations suivantes :

- $2x^2+4x+2=0$:

  On commence par calculer le discriminant : $\Delta = 4^2-4\times 2\times 2 = 16-16 = \mathbf{0}$

  $\Delta = 0$ donc cette équation admet **une unique solution réelle** :

$$r = -\frac{4}{2\times 2} = -1 \qquad \text{donc :} \qquad \boxed{2x^2+4x+2=0 \iff \mathbf{x=-1}}$$

- $4x^2-2x+5=0$:

  On commence par calculer le discriminant : $\Delta = (-2)^2-4\times 4\times 5 = 4-80 = \mathbf{-76}$

  $\Delta < 0$ donc cette équation n'admet **aucune solution réelle**.

- $2x^2-x-6>0$:

  On commence par calculer le discriminant : $\Delta = (-1)^2-4\times 2\times(-6) = 1+48 = \mathbf{49}$

  $\Delta > 0$ donc cette équation admet **deux solutions réelles** :

$$r_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-6}{4} = \mathbf{-\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$$

  On trace ensuite le tableau de signes ($a=2>0$) :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  D'où finalement :

$$\boxed{2x^2-x-6>0 \iff \mathbf{x} \in \left]-\infty\ ;\ \mathbf{-1,5}\right[\cup \left]\mathbf{2}\ ;\ +\infty\right[}$$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Démonstration :

On souhaite trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$, où $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On va utiliser la forme canonique, notre équation à résoudre devient donc :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

Or $a \neq 0$ donc cela équivaut à :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad (*)$$

Ou encore :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (**)$$

Raisonnons en suite en séparant les différents cas :

1. $\Delta < 0$:

   Alors en utilisant l'équation $(**)$ on remarque que l'on a :

   - D'une part $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ car c'est un carré ;
   - D'autre part $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ car $\Delta < 0$.

   Ainsi, ces deux termes ne peuvent être égaux et donc **il n'y a pas de solution réelle**.

2. $\Delta = 0$:

   Dans ce cas notre équation devient :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{b}{2a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x = -\frac{b}{2a}}$$

   Ainsi on a bien **une unique solution réelle** donnée ci-dessus.

3. $\Delta > 0$:

   On utilise alors l'équation $(*)$ que l'on met sous la forme suivante :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

   En utilisant la bonne identité remarquable cela nous donne :

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{-b}{2a}-\frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

   Ainsi on a bien **deux solutions réelles distinctes** données ci-dessus.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

C) Application

Propriété 3 : Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme et leur produit

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont solution de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Exemple(s) : Trouver la solution de : $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$

On pose $S = 2$ et $P = -3$. Il faut donc résoudre l'équation :

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

On commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = \mathbf{16}$$

$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2-4}{2} = \mathbf{-1} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2+4}{2} = \mathbf{3}$$

Ainsi **les couples $(-1\ ;\ 3)$ et $(3\ ;\ -1)$ sont les solutions de ce système**.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »