Nombres réels et intervalles

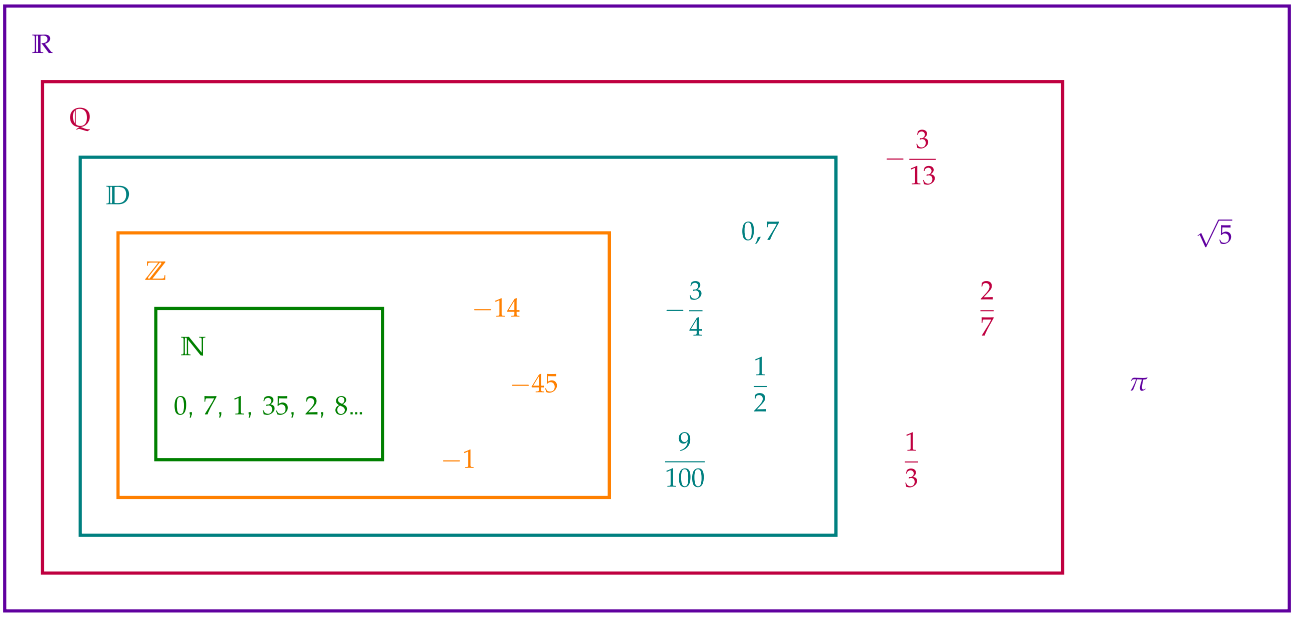
À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :	Je dois **savoir-faire** :
• Les ensembles de nombres	• Reconnaître à quel ensemble appartient un nombre
• Les démonstrations du cours	• Représenter un intervalle
• Les symboles des intervalles	• Simplifier une valeur absolue
• La définition de la valeur absolue	• Relier intervalle et valeur absolue

A) Ensembles de nombres

Définition 1 : Ensembles de nombres

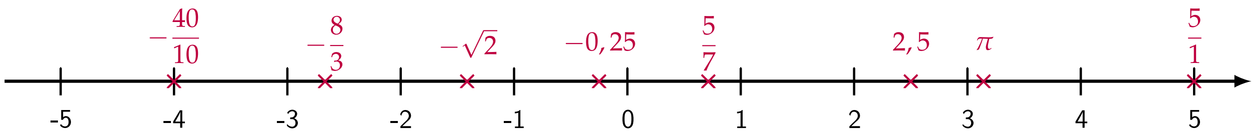
- L'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$ contient tous les nombres entiers positifs ou nuls : 0, 1, 2, 3...
- L'ensemble des **entiers relatifs** $\mathbb{Z}$ contient tous les nombres entiers positifs, nuls ou négatifs : ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...
- L'ensemble des **nombres décimaux** $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction décimale $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in N$.
- L'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}$ privé de 0).
- L'ensemble des **nombres réels** $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres x tels que $x^2 \geqslant 0$.



Propriété 1 : Droite réelle

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique.

Placer ci dessous : $-\frac{8}{3}$; $-\sqrt{2}$; $-0,25$; $\frac{5}{7}$; $2,5$; π ; $-\frac{40}{10}$; $\frac{5}{1}$



Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 2 :

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration :

Raisonnons **par l'absurde** en supposant que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.

Alors $\frac{1}{3}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in N$. On a donc :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \qquad \Longrightarrow \qquad 10^n = 3a$$

Or $3a$ est par définition un **multiple de** 3, donc 10^n doit donc également être un multiple de 3. Or quel que soit n, la somme des chiffres de 10^n vaut $1 + 0 \times n = 1$ qui n'est pas divisible par 3.

Ainsi, 10^n n'est pas un multiple de 3, ce qui est absurde. On a donc bien $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Propriété 3 :

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Démonstration :

On raisonne à nouveau **par l'absurde** en supposant que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ sous **forme irréductible**. Mettons cette égalité au carré, on a donc :

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{2q^2 = p^2} \qquad \Longrightarrow \qquad p^2 \text{ est pair}$$

p est soit pair, soit impair. Or on a vu au Chapitre 1 (Propriété 9) que **le carré d'un nombre impair est impair**. Or p^2 est pair, donc p ne peut pas être impair, donc **p est pair**.

Or par définition d'un nombre pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. On a donc :

$$2q^2 = (2k)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2q^2 = 4k^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{q^2 = 2k^2} \qquad \Longrightarrow \qquad q^2 \text{ est pair}$$

De la même manière que pour p, on en déduit que **q est pair**.

On a donc montré que p et q sont pairs, donc on peut simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ par 2, ce qui est **absurde** car il s'agissait d'une fraction **irréductible**. Ainsi, on a bien $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

B) Intervalles

Définition 2 : Notations

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

- L'**intervalle** $[a;b]$ est **l'ensemble des réels compris entre a et b**, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
- L'intervalle $[a;+\infty[$ est **l'ensemble des réels supérieurs à a**, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$.

Intervalle	Détails	Ensemble des x tels que	Représentation
$[a;b]$	Fermé	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a;b[$	Ouvert	$a < x < b$	
$[a;b[$	Fermé en a Ouvert en b	$a \leqslant x < b$	
$]a;b]$	Ouvert en a Fermé en b	$a < x \leqslant b$	
$[a;+\infty[$	Fermé en a	$a \leqslant x$	
$]-\infty;b]$	Fermé en b	$x \leqslant b$	
$]a;+\infty[$	Ouvert en a	$a < x$	
$]-\infty;b[$	Ouvert en b	$x < b$	

Définition 3 : Union et intersection

Soient I et J deux intervalles.

- L'**intersection** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent **à la fois** à I et à J. On la note $I \cap J$.
- La **réunion** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I **ou à** J. On la note $I \cup J$.

Exemple(s) :

- $[3;7] \cup [4;10] = \mathbf{[3;10]}$
- $[3;7] \cap [4;10] = \mathbf{[7;7]}$
- $[2;5[\cap [3;9] = \mathbf{[3;5[}$

C) Valeur absolue

Définition 4 : Valeur absolue

La **valeur absolue** d'un réel x est **la distance entre x et 0**. On la note et la calcule ainsi :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Exemple(s) :

$$|5| = \mathbf{5} \quad ; \quad |-2| = \mathbf{2} \quad ; \quad |3-2\times 7| = |3-14| = |-11| = \mathbf{11}$$

Définition 5 : Distance entre deux réels

Soient a et b deux réels. On appelle **distance entre a et b** le nombre $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$. Cette distance est aussi égale à $|b-a|$.

Exemple(s) :

- Distance entre 3 et 7 : $|3-5| = |5-3| = \mathbf{2}$
- Distance entre -4 et 5 : $|-4-5| = |5-(-4)| = \mathbf{9}$
- Distance entre -11 et -23 : $|-11-(-23)| = |-23-(-11)| = \mathbf{12}$

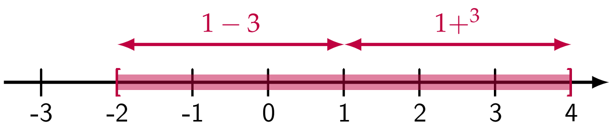
Propriété 4 :

Soient a et r deux réels avec $r > 0$. Alors :

$$x \in [a-r\ ;\ a+r] \quad \Leftrightarrow \quad |x-a| \leqslant r$$

Exemple(s) :

$$x \in [-2;4] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1-3;1+3] \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| \leqslant 3$$



Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »