Dérivation locale

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

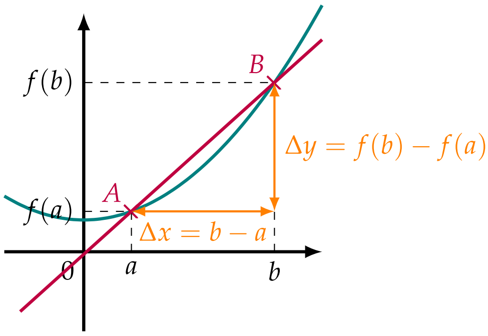
- La définition du taux de variation
- La définition du nombre dérivé
- L'équation de la tangente à une courbe

Je dois **savoir-faire** :

- Calculer un taux de variation et un nombre dérivé
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé
- Déterminer l'équation réduite de la tangente en un point d'une courbe
- Interpréter un nombre dérivé en contexte

A) Taux de variation et nombre dérivé

Définition 1 : Taux de variation d'une fonction entre deux réels



Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels distincts appartenant à I.

Le **taux de variation** de f entre a et b est le nombre réel m défini par :

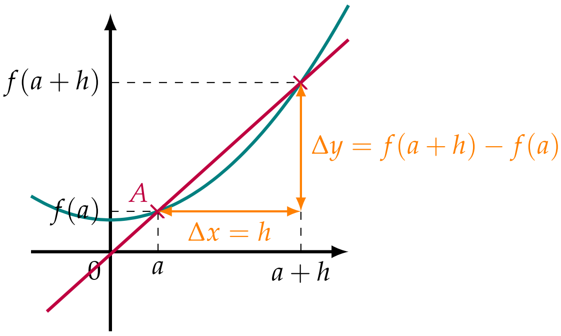
$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple(s) : Soit f la fonction carré $f : x \to x^2$.

Son taux de variation entre $a = 1$ et $b = 3$ est :

. . . .

Interprétation géométrique :



Le **taux de variation** de f entre a et b est le **coefficient directeur** de la droite (AB).

Remarque importante : **Autre formulation du taux de variation** :

On note généralement $b = a + h$ avec $h \neq 0$ et dans ce cas le taux de variation de f sur l'intervalle $[a\ ;\ a+h]$ est :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple(s) : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto 5x^2 - 2$.

1. Calculer $g(0)$: $\to$ . . . .
2. Calculer $g(0+h)$: $\to$ . . . .
3. En déduire son taux de variation pour $a = 0$ et $h \neq 0$:

   . . . .
4. Quel est le taux de variation pour $a = 0$ et $h = 0$?

   . . . .

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Définition 2 : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit a un nombre réel de l'intervalle I et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

On dit que la fonction f est **dérivable en** a lorsque $\tau(h)$ se rapproche d'une valeur réelle l quand h se rapproche de 0.

Ce réel l, **limite du taux de variation** lorsque h tend vers 0, est appelé **nombre dérivé** de la fonction f en a. On le note $\mathbf{f'(a)}$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Méthode 1 : Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point donné

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction f en un réel a :

1. On calcule le taux de variation $\tau(h)$ de f entre a et $a+h$ (pour $h \neq 0$). Pour ce faire :
   - On calcule $f(a)$;
   - On calcule $f(a+h)$ pour $h \neq 0$;
   - On en déduit $\tau(h)$, et on simplifie l'écriture de ce quotient.
2. On étudie ensuite le comportement de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0 :
   - Si $\tau(h)$ admet une limite réelle l lorsque h tend vers 0, alors f est **dérivable** en en a et dans ce cas : $f'(a) = l$.
   - Sinon, f n'est pas dérivable en a.

Exemple(s) :

1. Soit g la fonction définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Étudier la dérivabilité de g en 3 :

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. *(Approfondissement)* Soit f la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Étudier sa dérivabilité en 0 :

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Interprétation cinématique :

Étant donné un mobile M se déplaçant sur un axe $\left(O\ ;\ \vec{i}\right)$, on repère la la position de ce mobile de ce mobile à l'instant t par la distance $d(t)$ entre ce point et l'origine O.

Alors le **taux de variation** de d entre les instants t_0 et t_0+h correspond à la **vitesse moyenne** du mobile entre t_0 et t_0+h.

Si ce taux de variation admet une limite lorsque h tend vers 0, alors $d'(t_0)$ correspond à la **vitesse intantannée** de mobile à l'instant t_0.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 1 : Dérivabilité de $\sqrt{x}$

Soit f la fonction racine carrée :

$$f : \begin{array}{ccc} [0\,;\,+\infty[& \to & [0\,;\,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Cette fonction n'est **pas dérivable en 0**.

Démonstration :

Voir exercice n°55 p.122 pour plus d'approfondissement sur cette démonstration.

....

....

....

....

....

....

....

B) Équation de la tangente à une courbe

Définition 3 : Tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit a un réel de cet intervalle et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

Si f est dérivable en a, la **tangente** à $\mathcal{C}$ au point $A\,(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque :

Si l'on reprend les dessins de la première page de ce cours, la **tangente** en A est obtenue lorsque le point B se rapproche de plus en plus du point A, c'est-à-dire lorsque la distance h tend vers 0, ce qui correspond bien à la définition de $f'(a)$.

Définition 4 : Équation réduite de la tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit a un réel de cet intervalle et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

L'**équation réduite de la tangente** à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A\,(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple(s) : Soit f une fonction telle que $f(1) = 3$ et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$:

....

....

....

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »