1G1 — *Chapitre 4*

Dérivation locale

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :	Je dois **savoir-faire** :
• La définition du taux de variation • La définition du nombre dérivé • L'équation de la tangente à une courbe	• Calculer un taux de variation et un nombre dérivé • Déterminer graphiquement un nombre dérivé • Déterminer l'équation réduite de la tangente en un point d'une courbe • Interpréter un nombre dérivé en contexte

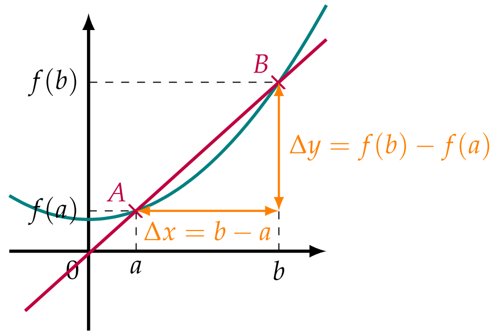
A) Taux de variation et nombre dérivé

Définition 1 : Taux de variation d'une fonction entre deux réels

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels distincts appartenant à I.

Le **taux de variation** de f entre a et b est le nombre réel m défini par :

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Exemple(s) : Soit f la fonction carré $f : x \to x^2$.

Son taux de variation entre $a = 1$ et $b = 3$ est :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3^2-1^1}{3-1} = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$$

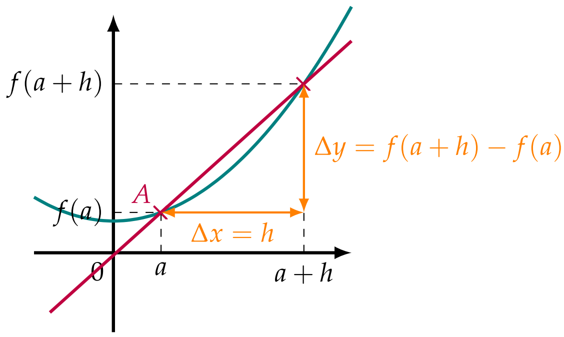
Interprétation géométrique :

Le **taux de variation** de f entre a et b est le **coefficient directeur** de la droite (AB).

Remarque importante : Autre formulation du taux de variation :

On note généralement $b = a + h$ avec $h \neq 0$ et dans ce cas le taux de variation de f sur l'intervalle $[a\ ;\ a+h]$ est :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Exemple(s) : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto 5x^2 - 2$.

1. Calculer $g(0)$: $\to$ $g(0) = 5 \times 0^2 - 2 = \mathbf{-2}$
2. Calculer $g(0+h)$: $\to$ $g(0+h) = 5 \times (0+h)^2 - 2 = \mathbf{5h^2 - 2}$
3. En déduire son taux de variation pour $a = 0$ et $h \neq 0$:

$$\tau(h) = \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{5h^2-2-(-2)}{h} = \frac{5h^2}{h} = \mathbf{5h}$$

4. Quel est le taux de variation pour $a = 0$ et $h = 0$?

$$\tau(0) = 5 \times 0 = \mathbf{0}$$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Définition 2 : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit a un nombre réel de l'intervalle I et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

On dit que la fonction f est **dérivable en** a lorsque $\tau(h)$ se rapproche d'une valeur réelle l quand h se rapproche de 0.

Ce réel l, **limite du taux de variation** lorsque h tend vers 0, est appelé **nombre dérivé** de la fonction f en a. On le note $\mathbf{f'(a)}$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Méthode 1 : Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point donné

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction f en un réel a :

1. On calcule le taux de variation $\tau(h)$ de f entre a et $a+h$ (pour $h \neq 0$). Pour ce faire :
   - On calcule $f(a)$;
   - On calcule $f(a+h)$ pour $h \neq 0$;
   - On en déduit $\tau(h)$, et on simplifie l'écriture de ce quotient.
2. On étudie ensuite le comportement de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0 :
   - Si $\tau(h)$ admet une limite réelle l lorsque h tend vers 0, alors f est **dérivable** en en a et dans ce cas : $f'(a) = l$.
   - Sinon, f n'est pas dérivable en a.

Exemple(s) :

1. Soit g la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Étudier la dérivabilité de g en 3 :
   - $g(3) = \dfrac{2}{3-1} = \dfrac{2}{2} = \mathbf{1}$
   - Soit $h > -2$. Alors : $g(3+h) = \dfrac{2}{3+h-1} = \mathbf{\dfrac{2}{2+h}}$
   - Donc $\tau(h) = \dfrac{g(3+h)-g(3)}{h} = \dfrac{\frac{2}{2+h}-1}{h} = \dfrac{2-(2+h)}{2+h} \times \dfrac{1}{h} = \dfrac{-h}{2+h} \times \dfrac{1}{h} = -\mathbf{\dfrac{1}{2+h}}$
   - Lorsque h tend vers 0, $2+h$ tend vers 2 et donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = -\dfrac{1}{2}$.

   Ainsi, g est dérivable en 3 et $\mathbf{g'(3)} = -\mathbf{\dfrac{1}{2}}$.

2. *(Approfondissement)* Soit f la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Étudier sa dérivabilité en 0 :
   - $f(0) = |0| = \mathbf{0}$
   - Soit $h \neq 0$. Alors : $f(0+h) = |0+h| = |h|$
   - Donc $\tau(h) = \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{|h|-0}{h} = \mathbf{\dfrac{|h|}{h}}$. Ici il y a 2 possibilités :
     - Si $h > 0$ alors $|h| = h$ et donc $\tau(h) = \dfrac{h}{h} = \mathbf{1}$
     - Si $h < 0$ alors $|h| = -h$ et donc $\tau(h) = \dfrac{-h}{h} = \mathbf{-1}$

   Ainsi, On a $\lim\limits_{h \to 0^+} \tau(h) = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0^-} \tau(h) = -1$.

   On obtient deux limites différentes pour $\tau(h)$ quand h tend vers 0, donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation cinématique :

Étant donné un mobile M se déplaçant sur un axe $\left(O\,;\,\vec{i}\right)$, on repère la position de ce mobile à l'instant t par la distance $d(t)$ entre ce point et l'origine O.

Alors le **taux de variation** de d entre les instants t_0 et t_0+h correspond à la **vitesse moyenne** du mobile entre t_0 et t_0+h.

Si ce taux de variation admet une limite lorsque h tend vers 0, alors $d'(t_0)$ correspond à la **vitesse instantanée** de mobile à l'instant t_0.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 1 : Dérivabilité de $\sqrt{x}$

Soit f la fonction racine carrée :

$$f : \begin{array}{rcl} [0\,;\,+\infty[& \to & [0\,;\,+\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Cette fonction n'est **pas dérivable en 0**.

Démonstration :

Voir exercice n°55 p.122 pour plus d'approfondissement sur cette démonstration.

- $f(0) = \sqrt{0} = 0$
- Soit $h > 0$, alors $f(0+h) = \sqrt{0+h} = \sqrt{h}$
- On en déduit que $\tau(h) = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h} - 0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$

Ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ car quand h tend vers 0, alors $\sqrt{h}$ devient de plus en plus petit, et donc $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand.

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 (on peut par contre démontrer qu'elle l'est pour tout $a > 0$).

B) Équation de la tangente à une courbe

Définition 3 : Tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit a un réel de cet intervalle et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

Si f est dérivable en a, la **tangente** à $\mathcal{C}$ au point $A\,(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque :

Si l'on reprend les dessins de la première page de ce cours, la **tangente** en A est obtenue lorsque le point B se rapproche de plus en plus du point A, c'est-à-dire lorsque la distance h tend vers 0, ce qui correspond bien à la définition de $f'(a)$.

Définition 4 : Équation réduite de la tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit a un réel de cet intervalle et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

L'**équation réduite de la tangente** à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A\,(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple(s) : Soit f une fonction telle que $f(1) = 3$ et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$:

La tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1 a donc pour équation réduite :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}(x-1) + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$$

Démonstration :

La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a admet une équation de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux constantes à déterminer.

Par définition de la tangente, $m = f'(a)$. L'équation est donc $y = f'(a)x + p$.

De plus, la tangente T passe par le point $A\,(a; f(a))$ donc ses coordonnées vérifient l'équation, et on a donc :

$$f(a) = f'(a) \times a + p \qquad \Longrightarrow \qquad p = f(a) - f'(a) \times a$$

L'équation de la tangente devient donc :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »