Variations et extremums de fonctions

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :
- Le vocabulaire relatif aux fonctions
- La notion de domaine de définition d'une fonction
- La définition du sens de variation
- La définition de la parité d'une fonction

Je dois **savoir-faire** :
- Dresser le tableau de signes d'une fonction
- Étudier et utiliser les variations d'une fonction
- Dresser le tableau de variations d'une fonction
- Déterminer les extremums d'une fonction
- Étudier et utiliser la parité d'une fonction
- Résoudre graphiquement une (in)équation

A) Généralités sur les fonctions

1. Définition et vocabulaire

Définition 1 : Fonction et ensemble de définition

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f sur l'ensemble D, c'est associer à tout nombre $x \in \mathbb{D}$ un unique réel $y \in \mathbb{R}$. On note alors $y = f(x)$.
On appelle D l'**ensemble de définition** de f. On note la fonction ainsi :

$$f:\begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Si x et y sont des réels tels que $y = f(x)$ alors on dit que :
- x est **un antécédent** de y ;
- y est **l'image** de x.

Exemple(s) : Soit f la fonction qui, à une température exprimée en degrés Celsius, calcule la température en degrés Fahrenheit :

$$f:\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1,8x + 32 \end{array}$$

Pour $x = 37$°C, alors la température en Fahrenheit est : $f(x) = 1,8 \times 37 + 32 = \mathbf{98,6}$**°F**

- 37 est un **antécédent** de 98,6 par f ;
- 98,6 est l'**image** de 37 par f .

On peut également définir des fonctions en Python :

```
def fahrenheit(x):
    # x est la température en degrés Celsius
    y = .......................
    return y
```

Exemple(s) : Soit g la fonction donnée par le programme de calcul suivant :

1. Choisir un réel entre -2 et 2 ;
2. Le mettre au carré ;
3. Ajouter 3.

1. Quel est le domaine de définition de g ? → $[-2;2]$
2. Donner l'expression de g :

$$g:\begin{array}{rcl} [-2;2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 3 \end{array}$$

3. Calculer l'image de 2 par g :

$g(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = \mathbf{7}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Définition 2 : Courbe représentative

Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition D.

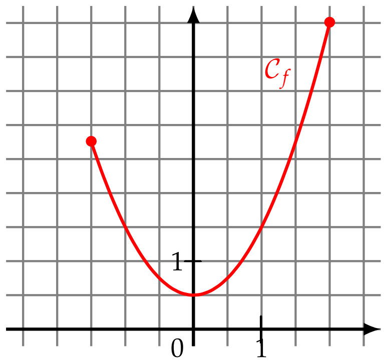
Dans un repère du plan, on appelle **courbe représentative** (ou **représentation graphique**) de f, notée $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ qui vérifient :

$$x \in D$$

$$y = f(x)$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est formée de tous les points dont l'**ordonnée** est l'image par f de l'**abscisse**.

Exemple(s) : Soit f la fonction tracée ci-dessous :



- Domaine de définition de f ?
  $[-1,5\ ;\ 2]$
- Image de 0 ?
  $f(0) = \mathbf{0,5}$
- Antécédent(s) de $4,5$?
  $f(\mathbf{2}) = 4,5$
- Antécédent(s) de $1,5$?
  $f(\mathbf{-1}) = 1,5$ et $f(\mathbf{1}) = 1,5$

2. Tableau de signes

Définition 3 : Signe d'une fonction

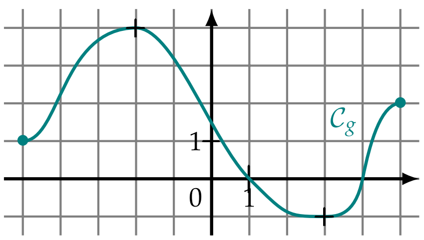
Soit une fonction f définie sur un ensemble D.

On dit qu'une fonction que la fonction f est :

- **positive** sur D si pour tout $x \in \mathbb{D}$ on a $\mathbf{f(x) \geqslant 0}$. Graphiquement, cela correspond aux intervalles pour lesquels la courbe représentative de f est **au-dessus** de l'axe des abscisses.
- **négative** sur D si pour tout $x \in \mathbb{D}$ on a $\mathbf{f(x) \leqslant 0}$. Graphiquement, cela correspond aux intervalles pour lesquels la courbe représentative de f est **en-dessous** de l'axe des abscisses.

On peut représenter cela à l'aide d'un **tableau de signes** (voir exemple).

Exemple(s) :



On peut construire le tableau de signes de la fonction g tracée ci-contre :

x	-5		1		4		5
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

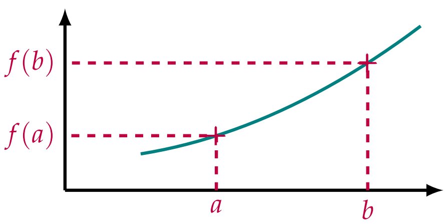
3. Variations et extremums

Définition 4 : Sens de variation d'une fonction

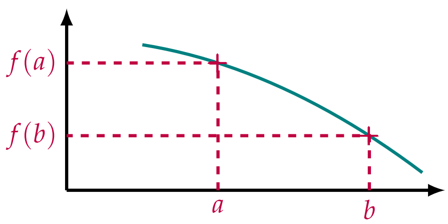
On considère une fonction f définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est **croissante** si pour tous a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) \leqslant f(b)$;
- f est **décroissante** si pour tous a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) \geqslant f(b)$;

Exemple(s) :



f est **croissante**

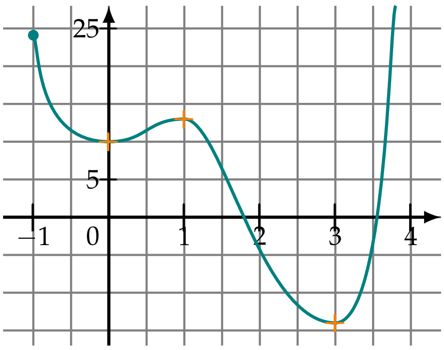


f est **décroissante**

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Méthode 1 : Tableau de variations

Pour une fonction donnée, on peut construire son **tableau de variations** :



Construire le tableau de la fonction f ci-contre, définie sur $[-1\ ;\ +\infty[$:

x	-1		0		1		3		$+\infty$
f	24	↘	10	↗	13	↘	-14	↗	

Remarques :

- Si les inégalités sont **strictes**, on dira alors que la fonction est **strictement** (dé)croissante.
- La fonction est **monotone** sur D si elle est croissante ou décroissante sur D (son sens de variation ne change pas sur D).

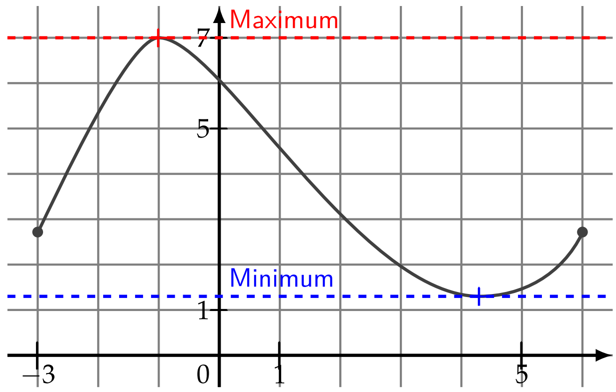
Définition 5 : Extremums

Soit f une fonction définie sur D.

On dit que f admet un :

- **minimum** m sur D si pour tout $x \in \mathbb{D}$, alors $f(x) \geqslant m$ et il existe une valeur $a \in D$ tel que $f(a) = m$: m est la **plus petite image** par f ;
- **maximum** M sur D si pour tout $x \in \mathbb{D}$, alors $f(x) \leqslant M$ et il existe une valeur $b \in D$ tel que $f(b) = M$: M est la **plus grande image** par f.

Remarque : Une fonction n'admet pas forcément un minimum ou un maximum.



Exemple(s) : Dans l'exemple précédent (celui du tableau de variations), donner les extremums de la fonction f :

- f admet un **minimum** de $\mathbf{-14}$ atteint pour $x = 3$;
- f n'admet pas de **maximum** sur son ensemble de définition !

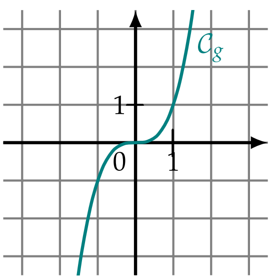
4. Parité

Définition 6 : Parité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **paire** si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(-x)$.
  Dans ce cas, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- f est **impaire** si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = -f(-x)$.
  Dans ce cas, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine**.

Exemple(s) :



On a tracé ci-contre la courbe de $g(x) = x^3$.

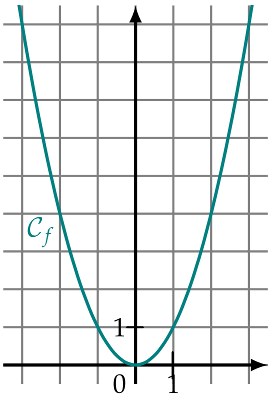
Vérifions sa parité :

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

g est donc une **fonction impaire**

On constate en effet sur le graphique ci-contre que sa représentation graphique est **symétrique par rapport à l'origine**.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »



On a tracé ci-contre la courbe de $f(x) = x^2$.

Vérifions sa parité :

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

f est donc une **fonction paire**

On constate en effet sur le graphique ci-contre que sa représentation graphique est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

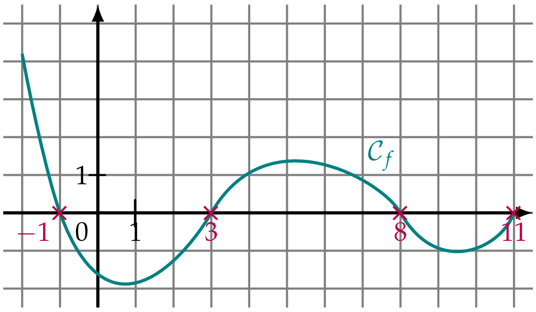
B) Résolution graphique d'équations et inéquations

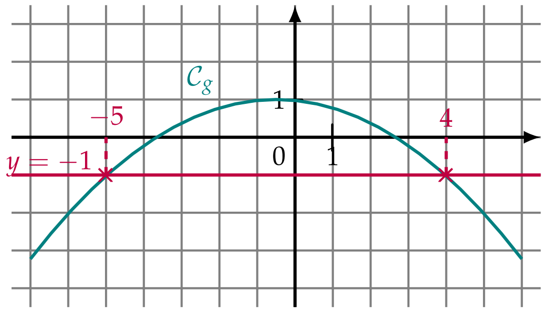
Méthode 2 : Équations de la forme $f(x) = k$

1. On trace la droite d'équation $y = k$, c'est à dire la droite horizontale d'ordonnée k.
2. On repère les points d'intersection entre cette droite et la courbe représentative de la fonction f.
3. Les solutions de l'équation sont les **abscisses** de ces points.

Cas particulier : si $k = 0$, alors il s'agit simplement des abscisses des points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.

Exemple(s) :





Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$:

Les points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses sont tracés. Il ne reste qu'à lire leurs abscisses. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc :

$$\mathcal{S} = \{-1\ ;\ 3\ ;\ 8\ ;\ 11\}$$

Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = -1$:

On trace la droite d'équation $y = -1$ et on repère les points d'intersection avec $\mathcal{C}_g$. Il ne reste qu'à lire leurs abscisses. Les solutions de l'équation $g(x) = -1$ sont donc :

$$\mathcal{S} = \{-5\ ;\ 4\}$$

Méthode 3 : Inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$ ou $f(x) \geqslant k$

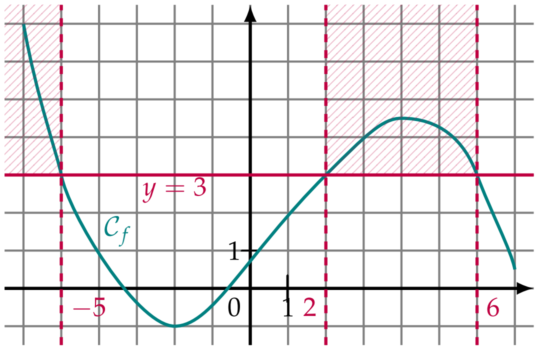
Ici, la solution sera généralement un intervalle (ou une union d'intervalles) de $\mathbb{R}$. La démarche est similaire à celle de la méthode précédente :

1. On trace la droite d'équation $y = k$, c'est à dire la droite horizontale d'ordonnée k.
2. On repère les points d'intersection entre cette droite et la courbe représentative de la fonction f.
3. Ici, il y a deux possibilités :
   - Si on veut résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant k$: alors on regarde l'intervalle sur lequel la courbe de f est **au-dessous** la droite tracée ;
   - Si on veut résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant k$: alors on regarde l'intervalle sur lequel la courbe de f est **au-dessus** la droite tracée.

Remarque : Si l'inéquation est stricte ($f(x) < k$ ou $f(x) > k$), alors la démarche est identique mais dans le résultat final il faut exclure les bornes de l'intervalle.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

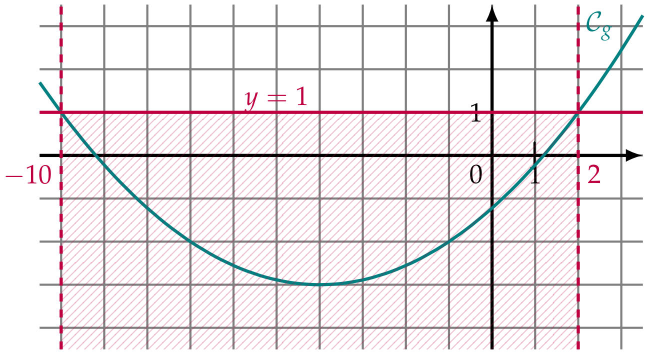
Exemple(s) :



Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant 3$:

On trace la droite d'équation $y = 3$ et on repère les points d'intersection avec $\mathcal{C}_f$. On regarde ensuite sur quels intervalles la courbe est-elle au-dessus de la droite tracée :

$$\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -5] \cup [2\ ;\ 6]$$



Résoudre graphiquement $g(x) < 1$:

On trace la droite d'équation $y = 1$ et on repère les points d'intersection avec $\mathcal{C}_g$. On regarde ensuite sur quels intervalles la courbe est-elle au-dessous de la droite tracée :

$$\mathcal{S} =]-10\ ;\ 2[$$

Méthode 4 : Équations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$ ou $f(x) \geqslant g(x)$

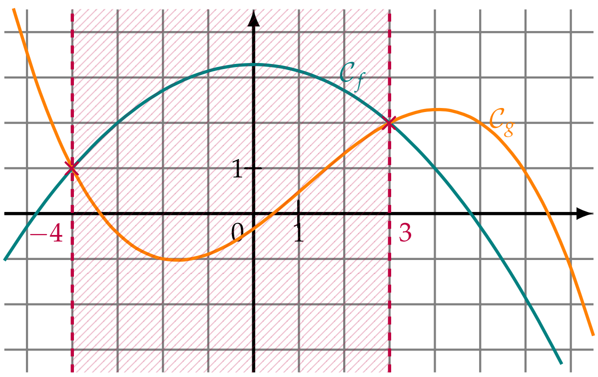
La méthode est très similaire à la précédente, sauf que l'on va regarder les points d'intersection entre les deux courbes et leurs positions relatives :

1. On repère les points d'intersection entre les deux courbes représentatives des fonctions f et g.
2. Ici, il y a deux possibilités :
   - Si on veut résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$: alors on regarde l'intervalle sur lequel la courbe de f est **au-dessous** de celle de g ;
   - Si on veut résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$: alors on regarde l'intervalle sur lequel la courbe de f est **au-dessus** de celle de g.

Remarque : Si l'inéquation est stricte ($f(x) < g(x)$ ou $f(x) > g(x)$), alors la démarche est identique mais dans le résultat final il faut exclure les bornes de l'intervalle.

Remarque : Si on veut résoudre $f(x) = g(x)$ alors la solution est donnée par les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Exemple(s) :



Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$:

Les points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont tracés. Il ne reste qu'à lire leurs abscisses. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont donc :

$$\mathcal{S} = \{-4\ ;\ 3\}$$

Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$:

On regarde l'intervalle sur lequel la courbe de f est au-dessus de celle de g :

$$\mathcal{S} =]-4\ ;\ 3[$$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »