Suites arithmétiques et géométriques

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- Définition et formule explicite d'une suite arithmétique
- Propriétés des suites arithmétiques
- Somme des termes d'une suite arithmétique
- Définition et formule explicite d'une suite géométrique
- Propriétés des suites géométriques
- Somme des termes d'une suite géométrique

Je dois **savoir-faire** :

- Identifier les caractéristiques d'une suite arithmétique
- Manipuler une suite arithmétique
- Identifier les caractéristiques d'une suite géométrique
- Manipuler une suite géométrique
- Modéliser un phénomène à l'aide d'une suite

A) Suites arithmétiques

Définition 1 : Suite arithmétique

Une suite est dite **arithmétique** lorsque, à partir de son terme initial, on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre** appelé **raison** de la suite.

Ainsi, la suite arithmétique de **terme initial** u_0 et de **raison** r est définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple(s) : Soit la suite (u_n) des multiples de 5 :

$$0 - 5 - 10 - 15 - 20 - \dots$$

....

....

....

....

Remarque : Les suites arithmétiques permettent de **modéliser des phénomènes d'évolution linéaire**, c'est-à-dire dont les variations sont constantes.

Propriété 1 : Formule explicite

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r.
Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + r \times n$$

Exemple(s) : Si on reprend la suite des multiples de 5 de l'exemple précédent :

....

....

....

....

Démonstration :

....

....

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 2 : **Monotonie et limite de la suite arithmétique (u_n) de terme initial u_0 et de raison r :**

	....	....	....
Monotonie de (u_n)	....	....	....
Limite de (u_n)	....	....	....

Propriété 3 : **Somme de $1+2+\cdots+n$**

La somme des n premiers entiers naturels non nuls est :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple(s) : La somme des 100 premiers entiers naturels non nuls est :

....

....

Démonstration :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

B) Suites géométriques

Définition 2 : **Suite géométrique**

Une suite est dite **géométrique** lorsque, à partir de son terme initial, on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre** appelé **raison** de la suite.

Ainsi, la suite géométrique de **terme initial** u_0 et de **raison** q est définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1}=q\times u_n$$

Exemple(s) : Soit la suite (u_n) des puissances de 2 :

$$1-2-4-8-16-\ldots$$

....

....

....

....

Remarque : Les suites géométriques permettent de **modéliser des phénomènes d'évolution exponentielle**, c'est-à-dire dont les variations entre deux termes consécutifs évoluent (mais de façon constante).

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 4 : Formule explicite

Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q.
Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple(s) : Si on reprend la suite des puissances de 2 de l'exemple précédent :

....

....

....

Démonstration :

....

....

Propriété 5 : Monotonie suite géométrique (u_n) de terme initial u_0 et de raison q avec $q > 0$:

	....	....	....
Si $u_0 \geqslant 0$	....	....	....
Si $u_0 \leqslant 0$	....	....	....

- ....
- ....

Propriété 6 : Limite suite géométrique (u_n) de terme initial u_0 et de raison q :

	....	....	....	....
Si $u_0 \geqslant 0$	....	....	....	....
Si $u_0 \leqslant 0$	....	....	....	....

Propriété 7 : Somme de $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1. Alors :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple(s) : Si on reprend la suite des puissances de 2 et qu'on additionne les 20 premiers termes :

....

....

Démonstration :

....

....

....

....

....

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »