Vecteurs du plan

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :	Je dois **savoir-faire** :
• La définition et le vocabulaire des vecteurs	• Construire des vecteurs
• La définition de vecteurs égaux ou opposés	• Reconnaître des vecteurs égaux ou opposés
• La relation de Chasles	• Construire une somme de vecteurs
• La notion de colinéarité entre des vecteurs	• Construire le produit d'un vecteur par un réel

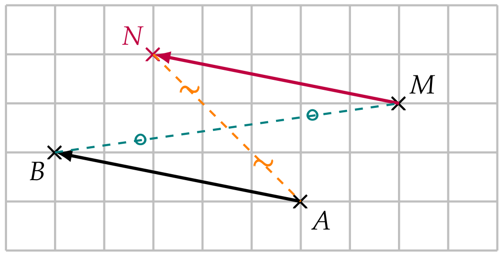
A) Notion de vecteur

Définition 1 : Translation et vecteur

Soient A et B deux points distincts du plan.

La **translation** qui transforme A en B associe à tout points M du plan un **unique** point N tel que $ABNM$ soit un **parallélogramme**.

On appelle la translation qui transforme A en B la translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.



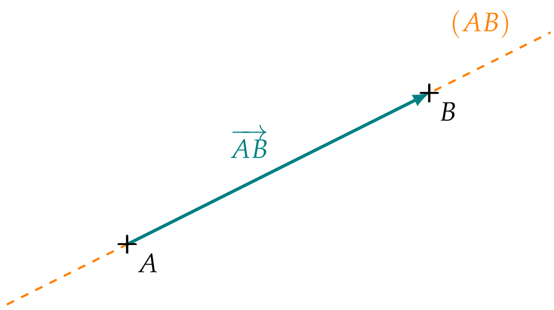
Définition 2 : Vocabulaire

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un **déplacement** caractérisé par :

- une **direction** : donnée par la **droite** (AB) ;
- un **sens** : de A **vers** B ;
- une **longueur** : la longueur AB.

On dit alors que :

- A est l'**origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- B est l'**extrémité** du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- La distance AB est appelée la **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Définition 3 : Cas particuliers

- Par convention, on appelle **vecteur nul** tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues. On le note $\overrightarrow{0}$, il n'a ni direction ni sens, et sa norme est 0. La translation de vecteur nul ne fait rien (elle transforme tout point en lui-même).
- La translation qui transforme B en A est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ est **l'opposé** de $\overrightarrow{AB}$.

Propriété 1 : Vecteurs égaux

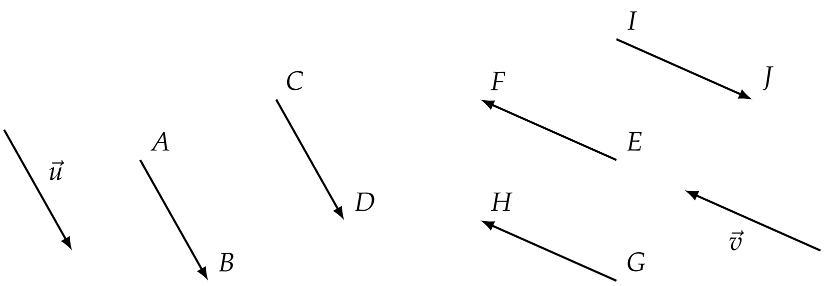
Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont la **même direction**, le **même sens** et la **même norme**. On écrit alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarque : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Dans l'exemple ci-contre, on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

Dans l'exemple ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont **opposés**.

Exemple(s) :



Trouver les vecteurs égaux :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 2 : Vecteurs égaux et parallélogramme

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).

B) Opérations sur les vecteurs

1. Somme de deux vecteurs

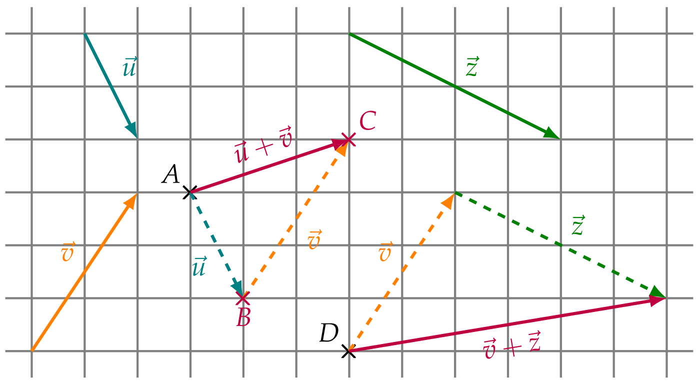
Définition 4 : Somme de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement de la translation de vecteur $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\vec{v}$. On note :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

Exemple(s) :

Construire ci-dessous le représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ d'origine A, puis le représentant du vecteur $\vec{v}+\vec{z}$ d'origine D :



Propriété 3 : Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan. On a alors :

$$\overrightarrow{A\mathbf{B}} + \overrightarrow{\mathbf{B}C} = \overrightarrow{AC}$$

Propriété 4 : Cas particuliers

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

- $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
- $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$
- On peut noter l'**opposé** du vecteur $\vec{u}$ ainsi : $-\vec{u}$. On a donc de manière pratique : $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$.

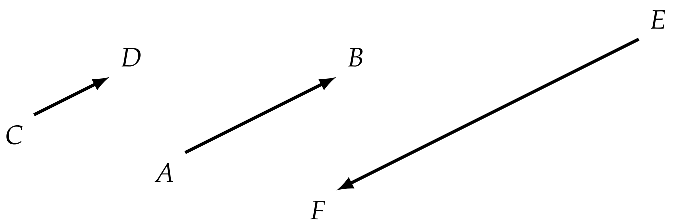
2. Produit d'un vecteur par un réel

Propriété 5 : Multiplier un vecteur par un réel

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et k un nombre réel. $k\overrightarrow{AB}$ est un vecteur de **même direction** que $\overrightarrow{AB}$, mais de **norme** $|k|AB$. De plus, son sens sera :

- le **même sens** que $\overrightarrow{AB}$ si $k>0$;
- le **sens contraire** de $\overrightarrow{AB}$ si $k<0$.

Exemple(s) :



Et :

$$\overrightarrow{CD} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{EF} = -\mathbf{2}\overrightarrow{AB}$$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 6 :

Soient k et k' deux nombres réels, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

$$k\vec{0} = \vec{0} \qquad 0\vec{u} = \vec{0} \qquad k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v} \qquad k(\vec{u}-\vec{v}) = k\vec{u}-k\vec{v} \qquad (k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$$

Définition 5 : Colinéarité

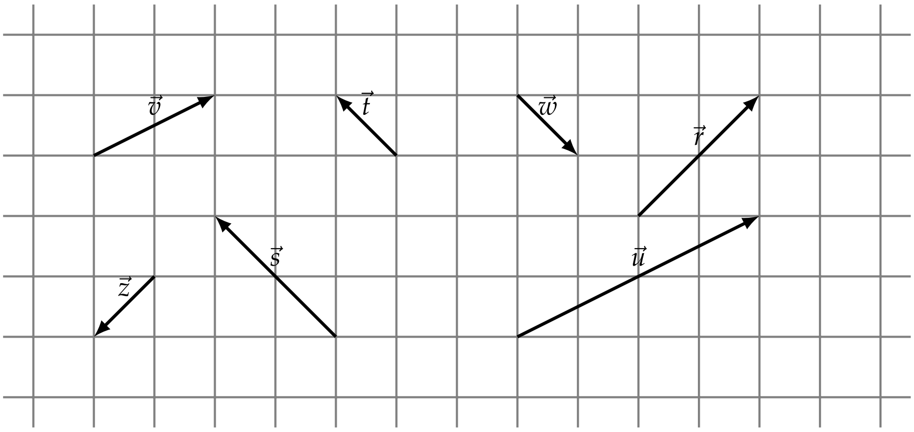
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Propriété 7 :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si ils ont la **même direction**.

Exemple(s) : Dans l'exemple précédent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

Exemple(s) : Quels sont les vecteurs colinéaires ? Justifier avec une relation de colinéarité :



$\vec{z}$ et $\vec{r}$ car :

$$\vec{r} = -2\vec{z}$$

$\vec{t}$, $\vec{s}$ et $\vec{w}$ car :

$$\vec{s} = 2\vec{t} \quad \text{et} \quad \vec{w} = -1\vec{t}$$

$\vec{v}$ et $\vec{u}$ car :

$$\vec{u} = 2\vec{v}$$

Propriété 8 : Colinéarité, parallélisme et alignement

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »