Dérivation globale

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :	Je dois **savoir-faire** :
• Les formules des fonctions dérivées de référence • Les règles de calcul sur les fonctions dérivables • Le lien entre dérivation et variations	• Utiliser les formules de dérivation • Étudier les variations d'une fonction et déterminer ses extrema • Résoudre des problèmes d'optimisation • Établir une inégalité avec les variations d'une fonction

Définition 1 : Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout $a \in I$, f est dérivable en a, alors on dit que la fonction f est **dérivable sur I**.
La fonction qui, à tout nombre $x \in I$, associe le nombre $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f et est notée f'.

A) Dérivées des fonctions de référence

Propriété 1 : Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Intervalle de définition	Expression de f	Intervalle de dérivabilité	Fonction dérivée f'
Constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ avec k une constante réelle	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
Affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = mx + p$ avec m et p réels	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Puissance	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
Puissance inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
Racine carrée	$[0\ ;\ +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemple(s) : Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = x^5$: ....
- $g(x) = 4x - 9$: ....
- $h(x) = \dfrac{1}{x^8}$: ....

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

B) Opérations sur les fonctions dérivables

Dans toute cette partie, on notera :

- u et v deux fonctions **définies et dérivables** sur un même intervalle I ;
- k une constante réelle.

Propriété 2 : Dérivée d'une somme de fonctions

La fonction somme définie sur I par $f(x) = u(x) + v(x)$ est **dérivable sur** I et pour tout x on a $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + \mathbf{v}'(\mathbf{x})$.
On note :

$$(u+v)' = u' + v'$$

Exemple(s) : Dériver la fonction $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ qui est définie sur $I = R^*$:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Propriété 3 : Dérivée d'un produit d'une fonction par une constante réelle

La fonction ku définie sur I par $f(x) = k \times u(x)$ est **dérivable sur** I et pour tout x on a $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{k} \times \mathbf{u}'(\mathbf{x})$.
On note :

$$(ku)' = ku'$$

Exemple(s) : Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x^2$: . . . .
- $g(x) = 5\sqrt{x}$: . . . .

Propriété 4 : Dérivée du produit de deux fonctions

La fonction produit définie sur I par $f(x) = u(x) \times v(x)$ est **dérivable sur** I et pour tout x on a $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \ + \ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \mathbf{v}'(\mathbf{x})$.
On note :

$$(uv)' = u'\,v + u\,v'$$

Exemple(s) : Dériver la fonction $f(x) = 3x\sqrt{x}$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Démonstration :

. . . .

Propriété 5 : Dérivée du quotient de deux fonctions (et inverse)

On suppose ici que v ne s'annule pas sur I.

La fonction quotient définie sur I par $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ est **dérivable sur** I et pour tout x on a $\mathbf{f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}}$.

On note :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Exemple(s) :

Dériver la fonction $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$:

. . . .

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Exemple(s) : Dériver la fonction $g(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x-1}$:

. . . .

Propriété 6 : Dérivée de la composée avec une fonction affine

On considère un intervalle I et deux réels a et b.
On note J l'intervalle des valeurs prises par $ax+b$ quand x décrit l'intervalle I.

Si la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par :

$$f : x \mapsto g(ax+b)$$

est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$:

$$\mathbf{f'(x) = a \times g'(ax+b)}$$

Exemple(s) : Dériver la fonction $f(x) = (-2x+8)^5$:

. . . .

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

C) Fonction dérivée et variations

1. Variations

Propriété 7 : Signe de la dérivée et sens de variation de la fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

- f est **croissante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) \geqslant 0}$ pour tout $x \in I$;
- f est **strictement croissante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) > 0}$ pour tout $x \in I$;

- f est **décroissante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) \leqslant 0}$ pour tout $x \in I$;
- f est **strictement décroissante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) < 0}$ pour tout $x \in I$;

- f est **constante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) = 0}$ pour tout $x \in I$.

Exemple(s) : Quelles sont les variations de la fonction $f(x) = -2x + 8$ définie sur $\mathbb{R}$?

....

Exemple(s) : Quelles sont les variations de la fonction $g(x) = x^2 + 6x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$?

....

....

....

Méthode 1 : Étudier les variations d'une fonction f

Pour étudier les variations d'une fonction f, on se ramène généralement à étudier le signe de sa dérivée f' :

1. On calcule l'expression de la fonction dérivée f' ;
2. On étudie le signe de f' ;
3. On trace le tableau de variations de f avec les lignes suivantes :
   - Valeurs de x ;
   - Signe de $f'(x)$;
   - Variations de f.
4. On calcule les images de f aux bornes de I si possible, ainsi qu'aux changements de variation.

Exemple(s) : Étudier les variations de la fonction $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ définie sur $I = [-2\ ;\ 4]$:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

2. Extrema locaux

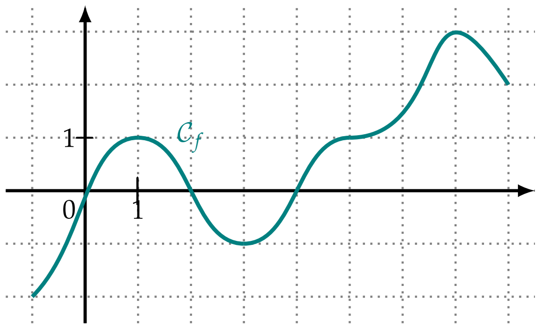
Définition 2 : Extrema d'une fonction

- Le réel M est le **maximum** de f sur I si :
  - Il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = M$;
  - Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leqslant M$.

  On dit alors que le le maximum de f sur I est M, **atteint en a**.
- Le réel m est le **minimum** de f sur I si :
  - Il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = m$;
  - Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geqslant m$.

  On dit alors que le le minimum de f sur I est m, **atteint en a**.
- On appelle **extremum** de f sur I le maximum ou le minimum de f sur I.
- On dit que α est un **extremum local** de f sur l'intervalle I s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tes que α soit un extremum de f sur ce sous-intervalle J.

Exemple(s) :



Extremum local	Atteint en	Voisinage

Propriété 8 : Extremum local et dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle réel I et a un réel de I qui n'est pas une borne de I.

Si f admet un extremum local en a, **alors** $f'(a) = 0$.

Exemple(s) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$:

. . . .

. . . .

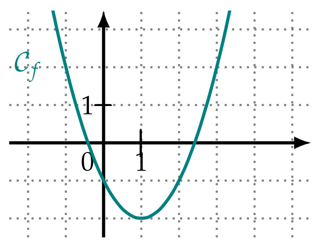
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



Exemple(s) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 10$:

. . . .

. . . .

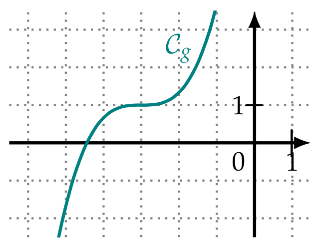
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 9 : Dérivée et extremum local

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle réel I et a un réel de I qui n'est pas une borne de I.

Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a.

Deux cas sont possibles :

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a)$ est un minimum

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a)$ est un maximum

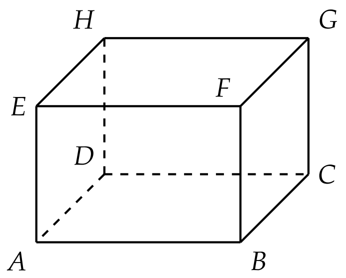
D) Applications

Méthode 2 : Résoudre un problème d'optimisation

Énoncé :

Un vase en verre a la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 16 cm. Ce vase à une contenance de 900 cm^3.
Quelles dimensions doit-on donner à ce vase pour qu'il ait une surface en verre minimale ? Justifier.

1. Interprétation des contraintes :
   On interprète les contraintes de l'énoncé sur les variables mises en jeu dans le problème. On exprime ensuite la quantité à optimiser en fonction d'une unique variable.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Étude des variations et des extrema éventuels de la fonction établie :
   On pense à préciser le **domaine de définition** de la fonction, puis on la dérive pour étudier ses variations et étudier l'existence d'un extremum.

....

....

....

....

....

....

....

....

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

3. Retour au problème et conclusion :
   On exploite maintenant les variations obtenues pour répondre à la question.

   ....

   ....

   ....

Méthode 3 : **Établir une inégalité**

Énoncé :

Soit f la fonction définie sur $I = [-13\ ;\ 2]$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x^2 + 6}$.
Donner un encadrement de f si $1 \leqslant x \leqslant 2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »