

Équations et inéquations

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- Le vocabulaire des (in)équations.
- Les règles de calculs pour résoudre une (in)équation.
- La méthode pour résoudre une inéquation-produit (ou inéquation-quotient).

Je dois **savoir-faire** :

- Résoudre une équation du premier degré.
- Résoudre une équation produit-nul (ou quotient-nul).
- Résoudre une inéquation du premier degré.
- Résoudre une inéquation-produit (ou inéquation-quotient) à l'aide d'un tableau de signes.

A) Rappels sur les équations

1. Vocabulaire

Définition 1 : Équation

Une **équation d'inconnue** x est une égalité dans laquelle intervient un nombre dont on ne connaît pas la valeur (et qu'on note donc x).

Définition 2 : Résoudre une équation

Résoudre dans un ensemble \mathcal{E} une équation d'inconnue x , c'est déterminer **toutes les valeurs** que peut prendre x dans \mathcal{E} telles que **l'égalité soit vraie**. Ces valeurs sont appelées **solutions de l'équation**.

On dit que **deux équations sont équivalentes** lorsqu'elles ont les **mêmes solutions**.

Exemple(s) :

- L'équation $x^2 + x - 2 = 0$ (E) :

.....

- L'équation $2x + 3 = -x + 6$ (E') admet 1 comme unique solution (on reverra après pourquoi).
- Les équations (E) et (E')

2. Équations du premier degré

Propriété 1 : Calculer avec les équations

On peut appliquer les manipulations suivantes à une équation pour produire une équation équivalente :

- Ajouter (ou soustraire) un **même nombre** aux **deux membres** de l'équation.
- Multiplier (ou diviser) par un **même nombre** les **deux membres** de l'équation.
- Simplifier, développer, factoriser, réduire l'un des deux membres de l'équation.

Exemple(s) : Reprenons l'équation (E') de tout à l'heure : $2x + 3 = -x + 6$

.....

Méthode 1 : Résoudre une équation du premier degré

En utilisant les propriétés d'équivalences vues ci-dessus, on transforme petit à petit l'équation initiale en une équation équivalente jusqu'à arriver à la forme $x = k$ en isolant l'inconnue dans un membre de l'équation (généralement à gauche mais parfois il est plus pratique de l'isoler à droite, et en mathématiques, $x = k$ ou $k = x$ sont équivalentes). Pour cela :

1. On « met » tous les termes en x dans un membre de l'équation ;
2. On « met » toutes les constantes (termes sans x) dans l'autre membre de l'équation ;
3. Il faut en général finir par diviser par la constante en facteur de x .

Exemple(s) :

$3x + 4 = 10$	$5y - 3 = 17$
.....
$7 + \frac{x}{3} = 9$	$\frac{2x - 5}{4} = 1,5$
.....

3. Équations produit-nul (ou quotient-nul)

La résolution de certaines équations plus complexes (par exemple équations du second degré) peut parfois se ramener à celle d'équations du premier degré, en regroupant tous les termes dans un même membre et en essayant de factoriser ce membre. On obtient alors une **équation produit-nul** ou une **équation quotient-nul**.

Propriété 2 : Équation produit-nul

Un produit de deux réels est nul **si et seulement si** au moins l'un de ses deux facteurs est nul. Autrement dit :

$$A(x) \times B(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \quad \text{ou} \quad B(x) = 0$$

Exemple(s) :

$(x - 2)(x + 5) = 0$	$(x + 4)(2x - 3) = 0$
.....

Propriété 3 : Équation quotient-nul

Un quotient de deux réels est nul **si et seulement si** son numérateur est nul et son dénominateur est non nul. Autrement dit :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \quad \text{et} \quad B(x) \neq 0$$

Les valeurs de x telles que $B(x) = 0$ sont appelées **valeurs interdites** du quotient.

Exemple(s) : L'équation $\frac{5x - 1}{x + 1} = 0$:

.....

.....

.....

.....

B) Inéquations

Définition 3 : Inéquation

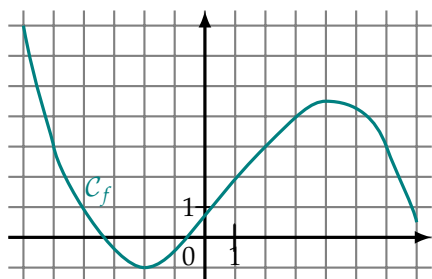
Une **inéquation** d'inconnue x est une inégalité dans laquelle intervient une inconnue x .

À la différence des équations, la solution d'une inéquation est plus généralement un intervalle (ou une union d'intervalles).

On dit que **deux inéquations sont équivalentes** lorsqu'elles ont le **même ensemble de solutions**.

Exemple(s) :

On a vu au **Chapitre 4** les résolutions **graphiques** d'inéquations :



Résoudre l'équation $f(x) \leq 3$ à l'aide du graphique ci-contre :

.....

.....

.....

.....

On va désormais chercher à résoudre les inéquations de manière algébrique (par le calcul).

1. Règles de résolution des inéquations

Propriété 4 : Calculer avec les inéquations

On peut appliquer les manipulations suivantes à une inéquation pour produire une inéquation équivalente (similaires à celles pour les équations) :

- Ajouter (ou soustraire) un **même nombre** aux **deux membres** de l'inéquation.
- Multiplier (ou diviser) par un **même nombre** les **deux membres** de l'inéquation **MAIS ATTENTION !**
 - **Si on multiplie (ou divise) par un nombre négatif non nul : il faut changer le sens de l'inégalité !**
 - Si on multiplie (ou divise) par un nombre positif ou nul : on ne change pas le sens de l'inégalité.
- Simplifier, développer, factoriser, réduire l'un des deux membres de l'équation.

Méthode 2 : Résoudre une inéquation du premier degré

En utilisant les propriétés d'équivalences vues ci-dessus, on transforme petit à petit l'inéquation initiale en une inéquation équivalente jusqu'à arriver à une des formes suivantes :

$$x < k$$

$$x \leq k$$

$$x > k$$

$$x \geq k$$

On peut également avoir une combinaison de ces formes (par exemple $a < x \leq b$).

Exemple(s) : Résoudre l'inéquation suivante :

$$3x < 7x + 12$$

.....

.....

.....

.....

.....

2. Inéquation-produit ou inéquation-quotient

Méthode 3 : Signe d'un produit et inéquation-produit

Pour étudier le signe d'un produit $A(x) \times B(x) \times \dots$, on détermine le signe de chaque facteur et on applique la règle des signes d'un produit à l'aide d'un tableau de signes bilan.

Exemple(s) : Résoudre l'inéquation-produit suivante :

$$(x - 6)(-2x + 3) > 0$$

.....

.....

.....

.....

Méthode 4 : Signe d'un quotient et inéquation-quotient

Pour étudier le signe du quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ on détermine le signe du numérateur et du dénominateur et on dresse un tableau de signe. Attention, les zéros du dénominateur sont des **valeurs interdites** !

Exemple(s) :

Résoudre l'inéquation $\frac{-2x + 4}{x - 1} \leq 0$:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
