Généralités sur les fonctions

A) Définition et représentations

Définition 1 : Fonction

Une **fonction** f est un *processus* qui à un nombre x associe un UNIQUE nombre $f(x)$ qui se lit « f de x ». On note :

$$f : x \mapsto f(x)$$

« La fonction f qui à x associe f de x. »

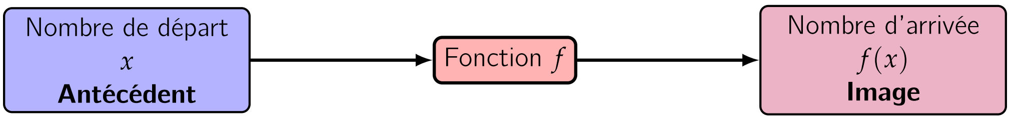
Exemple(s) :

1. Quelle est la fonction qui à un nombre x associe son double ? $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) = 2x}$
2. Quelle est la fonction qui à un nombre x associe la somme de son carré et de son triple ? $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) = x^2 + 3x}$

Définition 2 : Image/antécédent d'un nombre par une fonction

Soit la fonction $f : x \mapsto f(x)$. Alors :

- Le nombre $f(x)$ est l'**image de x par la fonction f.**
- Le nombre x est un **antécédent de $f(x)$ par la fonction f.**



Exemple(s) :

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 6$. Quelles sont les **images** de 0, de -2 et de -6 par f ?

   $\mathbf{f(0)} = 0^2 + 6 = \mathbf{6}$; $\mathbf{f(-2)} = (-2)^2 + 6 = 4 + 6 = \mathbf{10}$; $\mathbf{f(-6)} = (-6)^2 + 6 = 36 + 6 = \mathbf{42}$

2. Soit la fonction $g : x \mapsto x^2$. Quelles sont les **antécédents** de 0, de 9 et de -4 par g ?

   $\mathbf{0} = 0^2 = \mathbf{f(0)}$; $\mathbf{9} = 3^2 = \mathbf{f(3)}$; $\mathbf{-4}$ n'est le carré d'aucun nombre donc -4 **n'a pas d'antécédent par** f.

Remarque : Un nombre a toujours **une seule image** par une fonction f. Par contre, un nombre peut avoir **aucun, un ou plusieurs antécédents** par une fonction f.

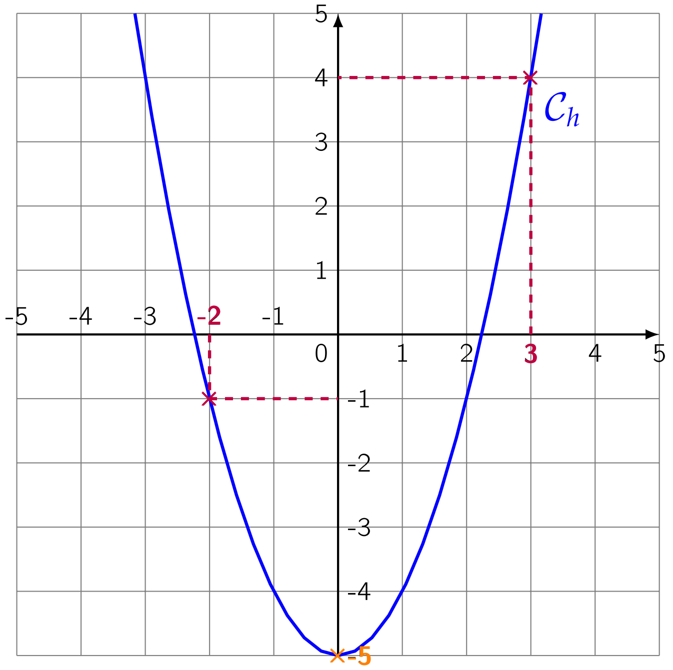
Définition 3 : Courbe représentative

Dans un repère, la **courbe représentative** (ou **représentation graphique**) d'une fonction h est l'ensemble des points de coordonnées $(\mathbf{x};\mathbf{h(x)})$.
On note généralement cette courbe représentative $\mathcal{C}_h$.

Sur l'axe des **abscisses** on peut lire :
x, l'antécédent de $h(x)$.

Sur l'axe des **ordonnées** on peut lire :
$h(x)$, l'image de x.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »



Exemple(s) :

1. Donner **graphiquement** l'**image** de 3 et de -2 : $\mathbf{h(3) = 4}$ et $\mathbf{h(-2) = -1}$
2. Donner **graphiquement** l'**antécédent** de -5 : $\mathbf{-5 = h(0)}$

B) Variations, signes, parité

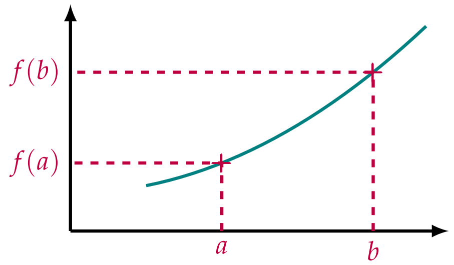
Définition 4 : Sens de variation d'une fonction

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

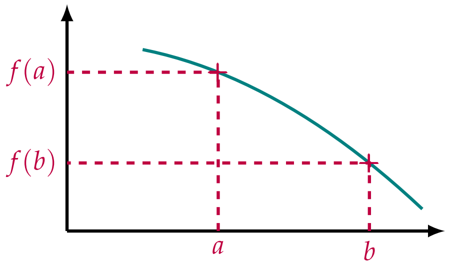
On dit que :

- f est **croissante** si pour tous a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) \leqslant f(b)$;
- f est **décroissante** si pour tous a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) \geqslant f(b)$;

Exemple(s) :



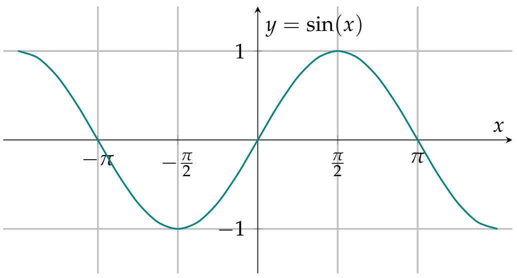
f est **croissante**.



f est **décroissante**.

Méthode 1 : Tableau de variations

Pour une fonction donnée, on peut construire son **tableau de variations** :

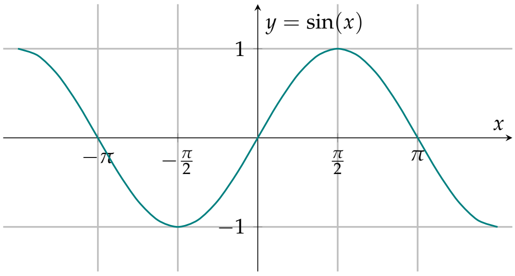


x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Méthode 2 : Tableau de signes

Pour une fonction donnée, on peut également construire son **tableau de signes** :



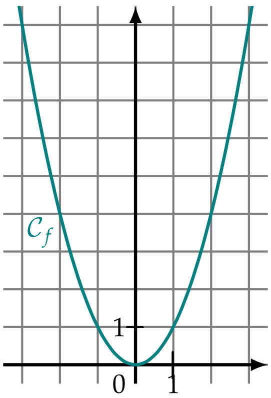
x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Définition 5 : Parité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **paire** si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(-x)$.
  Dans ce cas, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des abscisses**.
- f est **impaire** si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = -f(-x)$.
  Dans ce cas, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine**.

Exemple(s) :



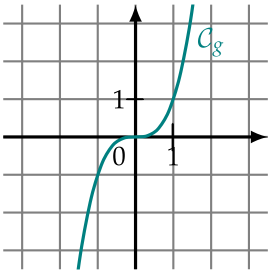
On a tracé ci-contre la courbe de $f(x) = x^2$.

Vérifions sa parité :

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

f est donc une **fonction paire**.

On constate en effet sur le graphique ci-contre que sa représentation graphique est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.



On a tracé ci-contre la courbe de $g(x) = x^3$.

Vérifions sa parité :

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

g est donc une **fonction impaire**.

On constate en effet sur le graphique ci-contre que sa représentation graphique est **symétrique par rapport à l'origine**.

C) Fonctions de référence

1. Fonctions affines

Définition 6 : Fonction affine

Une fonction f est dite **affine** s'il existe deux réels m et p tels que :

$$f(x) = mx + p$$

- m est appelé le **coefficient directeur** de f ;
- p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de f.

Cas particuliers :

- Si $p = 0$, alors $f(x) = mx$ est alors une fonction **linéaire** ;
- Si $m = 0$, alors $f(x) = p$ est alors une fonction **constante**.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 1 : Représentation graphique des fonctions affines

Une fonction affine est toujours représentée par une droite.

Cas particuliers :

- Dans le cas d'une fonction **linéaire**, sa droite représentative **passe par l'origine** du repère ;
- Dans le cas d'une fonction **constante**, sa droite représentative **est parallèle à l'axe des abscisses**.

Méthode 3 : Trouver les coefficients d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine, dont la courbe représentative passe par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. On a alors :

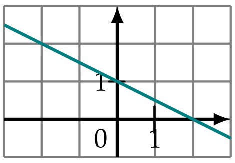
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \text{et} \qquad p = y_a - mx_A$$

Exemple(s) :

1. Soit f_1 telle que $f_1(-2) = 1$ et $f_1(3) = 11$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{11-1}{3-(-2)} = \frac{10}{5} = \mathbf{2} \qquad \text{et} \qquad p = 1 - 2 \times (-2) = \mathbf{5} \qquad \text{donc} \qquad \mathbf{f_1(x) = 2x + 5}$$

2. Soit f_2 dont on donne la courbe représentative ci-dessous :



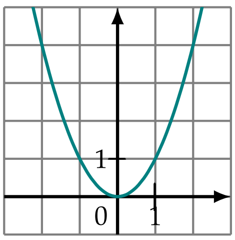
On prend 2 points : $A(0,1)$ et $B(2,0)$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{2-0} = \frac{-1}{2} = \mathbf{-0,5} \qquad \text{et} \qquad p = 1 - (-0,5) \times 0 = \mathbf{1}$$

Donc : $\mathbf{f_2(x) = -0,5x + 1}$

2. Autres fonctions de référence

Définition 7 : Fonction carré



La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = x^2$$

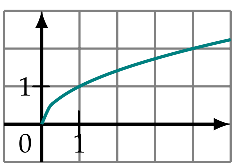
Sa courbe représentative est une **parabole**.

Propriété 2 : Propriétés de la fonction carré

- Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$;
- La fonction carré est **paire** ;
- Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

Définition 8 : Fonction racine carrée



La **fonction racine carré** est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

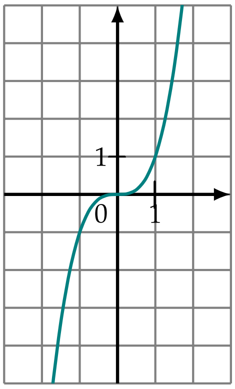
Rappel : pour tout réel positif x, $\sqrt{x}$ est le nombre tel que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 3 : Propriétés de la fonction racine carrée

- On a $\sqrt{0} = 0$ et pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$;
- La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$;
- Pour tous réels positifs a et b on a :
    - $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
    - Si $b \neq 0$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Définition 9 : Fonction cube



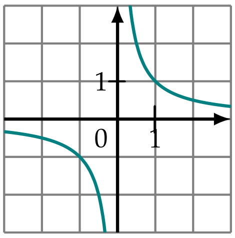
La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = x^3$$

Propriété 4 :

- La fonction cube est **impaire** ;
- La fonction cube est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Définition 10 : Fonction inverse



La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Sa courbe représentative est une **hyperbole**.

Propriété 5 : Propriétés de la fonction inverse

- La fonction inverse est **impaire** ;
- La fonction inverse ne vaut jamais 0 ;
- Son tableau de définition est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »