Suites numériques

A) Généralités

Définition 1 : Suite numérique

Une suite numérique u ou (u_n) est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$.

Moins formellement, c'est un ensemble infini de valeurs numérotées.

On note $\mathbf{u(n)}$ ou $\mathbf{u_n}$ le n-ème terme de la suite, appelé **terme de rang $\mathbf{n}$**.

Exemple(s) : Soit (u_n) une suite dont les premiers termes dont 2 puis 25 puis $1{,}5$ puis $7{,}25$...

On peut alors écrire :

- $u(0) = 2$
- $u(1) = 25$
- $u(2) = 1{,}5$
- $u(3) = 7{,}25$

Ou alors :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = 25$
- $u_2 = 1{,}5$
- $u_3 = 7{,}25$

Définition 2 : Modes de définition d'une suite

On peut définir une suite :

- Soit de **manière explicite** si on connaît u_n directement en fonction de n.
- Soit **par récurrence** si chaque terme dépend du (ou des) terme(s) précédent(s).

Exemple(s) :

- (u_n) telle que $u_n = 4n + 5$ est **explicite**.
- (v_n) telle que $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 3v_n - 1 \end{cases}$ est définie **par récurrence**.

Méthode 1 : Calculer les termes d'une suite

1. On commence par identifier si la suite est définie de manière explicite ou par récurrence.
2. Selon le cas :
   (a) Si elle est définie de **manière explicite** : on remplace n par les valeurs voulues.
   (b) Si elle est définie **par récurrence** : on calcul chaque terme en utilisant le précédent jusqu'à arriver au terme désiré.

Exemple(s) : Si on reprend les exemples précédents, et qu'on calcule les 3 premiers termes :

- (u_n) telle que $u_n = 4n + 5$ est **explicite** :
  - $u_0 = 4 \times 0 + 5 = 5$
  - $u_1 = 4 \times 1 + 5 = 9$
  - $u_2 = 4 \times 2 + 5 = 13$
- (v_n) telle que $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 3v_n - 1 \end{cases}$ est définie **par récurrence** :
  - $v_0 = 4$ (donné)
  - $v_1 = 3 \times v_0 - 1 = 3 \times 4 - 1 = 11$
  - $v_2 = 3 \times v_1 - 1 = 3 \times 11 - 1 = 32$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

B) Sens de variation d'une suite

Définition 3 : Sens de variation

Soit (u_n) une suite. On dit que la suite est :

- **croissante** lorsque pour tout n entier nature on a : $u_{n+1} \geqslant u_n$, c'est-à-dire lorsque les termes de la suite sont de plus en plus grands.
- **décroissante** lorsque pour tout n entier nature on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$, c'est-à-dire lorsque les termes de la suite sont de plus en plus petits.

Exemple(s) : Soit la suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 4$.

À chaque étape le terme diminue de 4, on a donc $u_{n+1} < u_n$ et donc la suite est **décroissante**.

Méthode 2 : Étudier le sens de variation d'une suite (u_n)

- On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout n.
- On étudie le signe de la différence :
  - Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et donc la suite est **croissante**.
  - Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc la suite est **décroissante**.

Exemple(s) : Étudier le sens de variation de la suite (w_n) définie pour tout n par $w_{n+1} = w_n + n^2 + n$:

$w_{n+1} - w_n = w_n + n^2 + n - w_n = n^2 + n \leqslant 0$ car $n \leqslant 0$.

La suite (w_n) est donc **croissante**.

C) Représentation graphique d'une suite

Définition 4 : Représentation graphique d'une suite

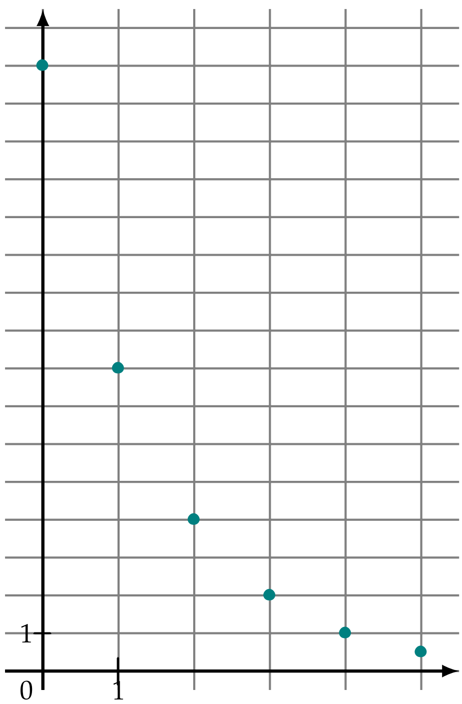
Soit (u_n) une suite.

Sans un repère, la représentation graphique de la suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

Exemple(s) :

Tracer la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 16 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

- $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 = \dfrac{1}{2} \times 16 = 8$
- $u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 = \dfrac{1}{2} \times 8 = 4$
- $u_3 = \dfrac{1}{2}u_2 = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$
- $u_4 = \dfrac{1}{2}u_3 = \dfrac{1}{2} \times 2 = 1$
- $u_5 = \dfrac{1}{2}u_4 = \dfrac{1}{2} \times 1 = 0,5$



Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »