

Variables aléatoires

A) Généralités

Définition 1 : Vocabulaire

On appelle :

- **expérience aléatoire** une expérience dont le résultat dépend du hasard (c'est-à-dire qu'on ne le connaît pas à l'avance) ;
- **issues** les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Définition 2 : Variable aléatoire

On appelle **variable aléatoire réelle** une fonction qui, à chaque issue d'une expérience aléatoire, associe un nombre réel.

Exemple(s) : Deux personnes jouent à lancer une pièce :

- Si on fait « Face », on gagne 10 € ;
- Si on fait « Pike », on perd 5 €.

La variable aléatoire X représente les **gains** de ce jeu.

On peut s'intéresser aux probabilités des événements des différentes valeurs prises par X :

Valeurs x	10 €	-5 €
Probabilités $P(X = x)$	0,5	0,5

B) Espérance

Définition 3 : Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire réelle dont on donne la loi de probabilité :

Valeurs x	x_1	x_2	...	x_n
Probabilités $P(X = x)$	p_1	p_2	...	p_n

On appelle **espérance** de la variable aléatoire X la quantité :

$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Exemple(s) : Pour qu'un plan de kiwi donne des fruits, il faut au moins un plan mâle pour 10 plans. Une jardinerie fait des lots de 20 plans au hasard, les plants mâles et femelles étant discernables à l'œil nu.

On considère X la variable aléatoire correspondant au nombre de plans mâles dans un lot de 20 plans. Une étude statistique a permis de déterminer la loi de probabilités de X suivante :

Valeurs x	0	1	2	3	4
Probabilités $P(X = x)$	0,05	0,1	0,52	0,13	0,2

L'espérance de X est donc :

$$E(x) = 0 \times 0,05 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,52 + 3 \times 0,13 + 4 \times 0,2 = 2,33$$

Propriété 1 :

L'espérance d'une variable aléatoire est la valeur moyenne obtenue, par expérience, au bout d'un grand nombre de répétitions de l'expérience.

Exemple(s) : Dans l'exemple précédent, $E(X) = 2,33$ signifie qu'en moyenne il y a 2,33 plans mâles dans un lot.

C) Loi de Bernoulli

Définition 4 : Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire comportant 2 issues appelées **succès** et **échec**.

On note p la probabilité de succès (donc p est compris entre 0 et 1).

Exemple(s) : Dans un QCM avec 4 réponses, on choisit une réponse au hasard. La probabilité de tomber sur la bonne réponse est $p = \frac{1}{4} = 0,25$.

Propriété 2 : Loi de probabilité et espérance dans une expérience de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une épreuve de Bernoulli.

On dit que « X suit une loi de Bernoulli de paramètre p » et on peut le noter ainsi : $X \sim \mathcal{B}(p)$ Voici sa loi de probabilités :

Valeurs x	1 (succès)	0 (échec)
Probabilités $P(X = x)$	p	$1 - p$

De plus on a :

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

Remarque : si $p = 0,5$, alors le succès et l'échec sont **équiprobables**. Par exemple, dans un jeu de pile ou face équilibré.

D) Loi binomiale

Définition 5 : Échantillon

On appelle **échantillon** de taille n la liste des résultats obtenus si on répète n fois une même épreuve de Bernoulli, de manière **indépendante**.

Remarque : l'indépendance signifie ici que le résultat d'une expérience ne dépend pas des expériences précédentes.

Définition 6 : Loi binomiale

Le **nombre de succès** dans un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p suit une **loi binomiale de paramètres n et p** . On peut la noter : $\text{Bin}(n; p)$

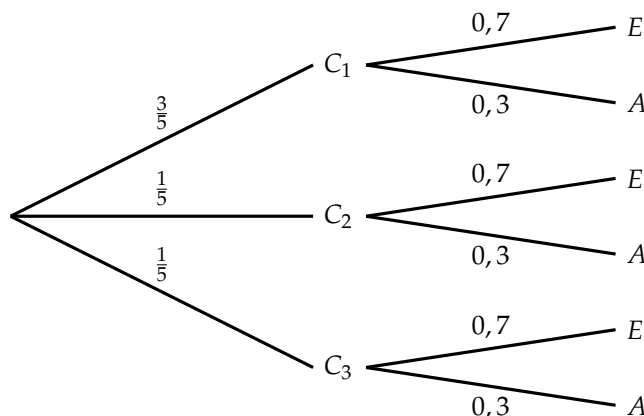
E) Expérience aléatoire à plusieurs épreuves

Définition 7 : Arbre de probabilité

Si on réalise plusieurs expériences aléatoires successives, on peut alors les représenter avec un **arbre de probabilité**.

Chaque « nouvel étage » représente une nouvelle expérience aléatoire. On note sur chaque branche la probabilité de l'issue correspondante.

Exemple(s) : On choisit au hasard un élève de 2nde et on regarde son collègue d'origine (C_1, C_2, C_3), puis la LV2 (E ou A) :



D'après cet arbre :

- La probabilité qu'il vienne du collège C_1 est $\frac{3}{5}$: $P(C_1) = \frac{3}{5}$
- **Sachant que** l'élève vient du collège C_3 , la probabilité qu'il fasse allemand est 0,4 : $P(A|C_3) = P_{C_3} = 0,4$

Propriété 3 :

La probabilité d'un « chemin » est donnée par le produit de chacune des probabilités des branches du chemin.

Exemple(s) : La probabilité que l'élève vienne du collège C_2 **et** fasse Espagnol est :

$$P(C_2 \cap E) = \frac{1}{5} \times 0,7 = \mathbf{0,14}$$

Exemple(s) : La probabilité que l'élève fasse Espagnol se calcule ainsi :

$$P(E) = \frac{3}{5} \times 0,7 + \frac{1}{7} \times 0,7 + \frac{1}{5} \times 0,6 = \mathbf{0,68}$$