Dérivation globale

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :	Je dois **savoir-faire** :
• Les formules des fonctions dérivées de référence • Les règles de calcul sur les fonctions dérivables • Le lien entre dérivation et variations	• Utiliser les formules de dérivation • Étudier les variations d'une fonction et déterminer ses extrema • Résoudre des problèmes d'optimisation • Établir une inégalité avec les variations d'une fonction

Définition 1 : Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si pour tout $a \in I$, f est dérivable en a, alors on dit que la fonction f est **dérivable sur I**.
La fonction qui, à tout nombre $x \in I$, associe le nombre $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f et est notée f'.

A) Dérivées des fonctions de référence

Propriété 1 : Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Intervalle de définition	Expression de f	Intervalle de dérivabilité	Fonction dérivée f'
Constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ avec k une constante réelle	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
Affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = mx + p$ avec m et p réels	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Puissance	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
Puissance inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
Racine carrée	$[0\ ;\ +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemple(s) : Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = x^5$: C'est une fonction **puissance** donc $\mathbf{f'(x) = 5x^4}$
- $g(x) = 4x - 9$: C'est une fonction **affine** donc $\mathbf{g'(x) = 4}$
- $h(x) = \dfrac{1}{x^8}$: C'est une fonction **puissance inverse** donc $\mathbf{h'(x) = -\dfrac{8}{x^9}}$

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

B) Opérations sur les fonctions dérivables

Dans toute cette partie, on notera :

- u et v deux fonctions **définies et dérivables** sur un même intervalle I ;
- k une constante réelle.

Propriété 2 : Dérivée d'une somme de fonctions

La fonction somme définie sur I par $f(x) = u(x) + v(x)$ est **dérivable sur** I et pour tout x on a $\mathbf{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$.
On note :

$$(u+v)' = u' + v'$$

Exemple(s) : Dériver la fonction $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ qui est définie sur $I = R^*$:

f peut s'écrire comme la somme $f = u + v$ où $u(x) = x^2$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$.

u et v sont dérivables sur I donc f est également dérivable sur I et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

Propriété 3 : Dérivée d'un produit d'une fonction par une constante réelle

La fonction ku définie sur I par $f(x) = k \times u(x)$ est **dérivable sur** I et pour tout x on a $\mathbf{f'(x) = k \times u'(x)}$.
On note :

$$(ku)' = ku'$$

Exemple(s) : Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x^2$: $f'(x) = 3 \times 2x = \mathbf{6x}$
- $g(x) = 5\sqrt{x}$: $g'(x) = 5 \times u'(x)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ donc $g'(x) = 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \mathbf{\dfrac{5}{2\sqrt{x}}}$

Propriété 4 : Dérivée du produit de deux fonctions

La fonction produit définie sur I par $f(x) = u(x) \times v(x)$ est **dérivable sur** I et pour tout x on a $\mathbf{f'(x) = u'(x) \times v(x) \ + \ u(x) \times v'(x)}$.
On note :

$$(uv)' = u'\,v + u\,v'$$

Exemple(s) : Dériver la fonction $f(x) = 3x\sqrt{x}$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$:

f peut s'écrire comme le produit des fonctions $u(x) = 3x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

u et v sont toutes deux dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc f l'est également et on a pour tout $x > 0$:

$$u'(x) = 3 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Et donc :

$$f'(x) = 3 \times \sqrt{x} + 3x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On simplifie :

$$f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Finalement :

$$\mathbf{f'(x) = \frac{9}{2}\sqrt{x}}$$

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Démonstration :

On considère la fonction $f = u \times v$, où u et v sont dérivables sur I.
Soit $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

- $f(a) = u(a) \times v(a)$
- $f(a+h) = u(a+h) \times v(a+h)$
- $f(a+h) - f(a) = u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)$

Ainsi le taux d'accroissement est :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

On soustrait et on ajoute (ce qui ne change donc pas l'égalité) $u(a+h) \times v(a)$ et on sépare la fraction en deux :

$$\tau_a(h) = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a+h) \times v(a)}{h} + \frac{u(a+h) \times v(a) - u(a) \times v(a)}{h}$$

On peut alors mettre $u(a+h)$ en facteur dans la première fraction, et $v(a)$ en facteur dans la seconde fraction :

$$\tau_a(h) = u(a+h) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a)$$

On remarque alors que $\frac{v(a+h) - v(a)}{h}$ est le taux d'accroissement de v en a, et $\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$ est celui de u.
Comme u et v sont dérivables en a on a donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$$

Ainsi f est dérivable en a et :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} u(a)v'(a) + u(a)v'(a)$$

Ceci étant valable pour tout $a \in I$, on a la formule recherchée.

Propriété 5 : Dérivée du quotient de deux fonctions (et inverse)

On suppose ici que v ne s'annule pas sur I.

La fonction quotient définie sur I par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est **dérivable sur** I et pour tout x on a $\mathbf{f'(x)} = \dfrac{\mathbf{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}}{\mathbf{(v(x))^2}}$.

On note :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple(s) : Dériver la fonction $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$:

On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 2x + 1 \qquad\qquad v(x) = x^2 + 1$$

$$u'(x) = 2 \qquad\qquad v'(x) = 2x$$

Ainsi on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{2 \times (x^2+1) - (2x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 2x}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Et donc finalement :

$$f'(x) = \frac{\mathbf{-2x^2 - 2x + 2}}{\mathbf{x^4 + 2x^2 + 1}}$$

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Exemple(s) : Dériver la fonction $g(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x-1}$:

On vérifie d'abord l'ensemble de définition de g :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$$

Les valeurs interdites de g sont donc :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

g est donc définie sur $I = \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \,;\, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

On a donc $g = \dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 2x^2 + x + 1 \qquad\qquad v(x) = x^2 - x - 1$$

$$u'(x) = 4x + 1 \qquad\qquad v'(x) = 2x - 1$$

Ainsi g est dérivable sur I et on a :

$$g'(x) = \frac{(4x+1)(x^2-x-1) \ - \ (2x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2-x-1)^2}$$

On développe et on simplifie le numérateur :

$$g'(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 - 4x + x^2 - x - 1 \ - \ (4x^3 - 2x^2 + 2x^2 - x + 2x - 1)}{(x^2-x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 - 5x - 1 \ - \ (4x^3 + x - 1)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2 - 5x - 1 \ - 4x^3 - x + 1}{(x^2-x-1)^2}$$

Finalement :

$$\mathbf{g'(x) = \frac{-3x^2 - 6x}{(x^2-x-1)^2} = \frac{-3x(x+2)}{(x^2-x-1)^2}}$$

Propriété 6 : **Dérivée de la composée avec une fonction affine**

On considère un intervalle I et deux réels a et b.
On note J l'intervalle des valeurs prises par $ax + b$ quand x décrit l'intervalle I.

Si la fonction g est dérivable sur J, alors la fonction f définie sur I par :

$$f : x \mapsto g(ax + b)$$

est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$:

$$\mathbf{f'(x) = a \times g'(ax + b)}$$

Exemple(s) : Dériver la fonction $f(x) = (-2x+8)^5$:

La fonction f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est de la forme $f(x) = g(-2x+8)$ avec $g(y) = y^5$.

On a $g'(y) = 5y^4$, on peut donc appliquer la formule vue ci-dessus :

$$f'(x) = -2 \times 5\,(-2x+8)^4 = \mathbf{-10\,(-2x+8)^4}$$

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

C) Fonction dérivée et variations

1. Variations

Propriété 7 : Signe de la dérivée et sens de variation de la fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

- f est **croissante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) \geqslant 0}$ pour tout $x \in I$;
- f est **strictement croissante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) > 0}$ pour tout $x \in I$;

- f est **décroissante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) \leqslant 0}$ pour tout $x \in I$;
- f est **strictement décroissante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) < 0}$ pour tout $x \in I$;

- f est **constante** sur I *si et seulement si* $\mathbf{f'(x) = 0}$ pour tout $x \in I$.

Exemple(s) : Quelles sont les variations de la fonction $f(x) = -2x + 8$ définie sur $\mathbb{R}$?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = -2 < 0$ donc f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

Exemple(s) : Quelles sont les variations de la fonction $g(x) = x^2 + 6x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = 2x + 6$.

g' est une fonction affine de coefficient directeur positif et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$, donc :

g' est négative pour $x \leqslant 3$ et positive pour $x \geqslant 3$, donc la fonction g est **décroissante** sur $]-\infty\ ;\ 3]$ et **croissante** sur $[3\ ;\ +\infty[$.

Méthode 1 : Étudier les variations d'une fonction f

Pour étudier les variations d'une fonction f, on se ramène généralement à étudier le signe de sa dérivée f' :

1. On calcule l'expression de la fonction dérivée f' ;
2. On étudie le signe de f' ;
3. On trace le tableau de variations de f avec les lignes suivantes :
   - Valeurs de x ;
   - Signe de $f'(x)$;
   - Variations de f.
4. On calcule les images de f aux bornes de I si possible, ainsi qu'aux changements de variation.

Exemple(s) : Étudier les variations de la fonction $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ définie sur $I = [-2\ ;\ 4]$:

1. Calcul de la dérivée :
$$h'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 12 = \mathbf{6x^2 - 6x - 12}$$
2. Étude du signe de la dérivée :
h' est une fonction polynomiale de degré 2 donc on peut trouver ses racines à l'aide du discriminant :
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 6 \times (-12) = \mathbf{324}$$
$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{324}}{2 \times 6} = \frac{6 - 18}{12} = \mathbf{-1} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{6 + \sqrt{324}}{2 \times 6} = \frac{6 + 18}{12} = \mathbf{2}$$
3. Tableau de variations :

x	-2		-1		2		4
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	2	$\nearrow$	13	$\searrow$	-14	$\nearrow$	38

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

2. Extrema locaux

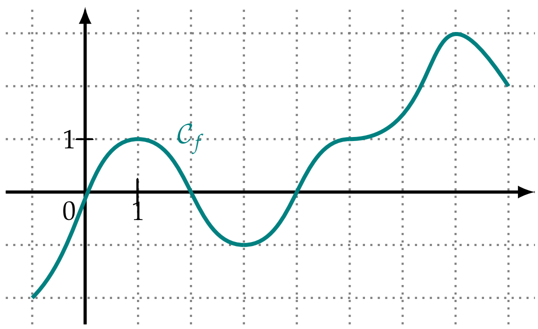
Définition 2 : Extrema d'une fonction

- Le réel M est le **maximum** de f sur I si :
  - Il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = M$;
  - Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leqslant M$.

  On dit alors que le le maximum de f sur I est M, **atteint en a**.
- Le réel m est le **minimum** de f sur I si :
  - Il existe un réel $a \in I$ tel que $f(a) = m$;
  - Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geqslant m$.

  On dit alors que le le minimum de f sur I est m, **atteint en a**.
- On appelle **extremum** de f sur I le maximum ou le minimum de f sur I.
- On dit que α est un **extremum local** de f sur l'intervalle I s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tes que α soit un extremum de f sur ce sous-intervalle J.

Exemple(s) :



Extremum local	Atteint en	Voisinage
Maximum local de 1	$x = 1$	$]-1\ ;\ 3[$
Minimum local de -1	$x = 3$	$]1\ ;\ 5[$
Maximum local (et global) de 3	$x = 7$	$]6\ ;\ 8[$

Propriété 8 : Extremum local et dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle réel I et a un réel de I qui n'est pas une borne de I.

Si f admet un extremum local en a, **alors** $f'(a) = 0$.

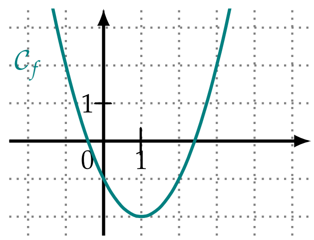
Exemple(s) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$:

On observe sur la courbe ci-contre que f admet un minimum local de -2 atteint pour $x = 1$.

On a donc $f'(1) = 0$. Vérifions-le :

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(1) = 2 \times 1 - 2 = \mathbf{0}$$

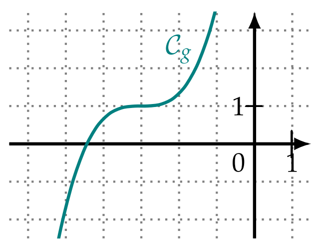


Exemple(s) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 10$:

g n'admet pas d'extremum localsur $\mathbb{R}$. Pourtant :

$$g'(x) = x^2 + 6x + 9$$

$$g'(-3) = (-3)^2 + 6 \times (-3) + 9 = 9 - 18 + 9 = \mathbf{0}$$



On voit donc bien que ce n'est pas parce que $g'(a) = 0$ que g admet forcément un extremum local en a !

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 9 : Dérivée et extremum local

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle réel I et a un réel de I qui n'est pas une borne de I.

Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a.

Deux cas sont possibles :

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a)$ est un minimum

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a)$ est un maximum

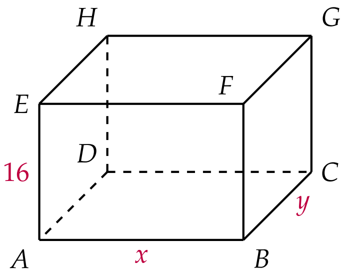
D) Applications

Méthode 2 : Résoudre un problème d'optimisation

Énoncé :

Un vase en verre a la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 16 cm. Ce vase à une contenance de 900 cm^3.
Quelles dimensions doit-on donner à ce vase pour qu'il ait une surface en verre minimale ? Justifier.

1. Interprétation des contraintes :
   On interprète les contraintes de l'énoncé sur les variables mises en jeu dans le problème. On exprime ensuite la quantité à optimiser en fonction d'une unique variable.



On note x et y les dimensions, en cm, du rectangle de base de ce vase.
On a alors :

$$\mathcal{V} = 16xy \text{ et } \mathcal{V} = 900 \text{ cm}^3 \implies 16xy = 900 \implies \mathbf{xy = \frac{225}{4}}$$

$$\implies y = \mathbf{\frac{225}{4x}}$$

Calculons ensuite la surface en verre de ce vase :

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{ABCD} + 2\mathcal{A}_{ABFE} + 2\mathcal{A}_{BCGF} = xy + 2 \times 16x + 2 \times 16y = xy + 32x + 32y$$

On remplace ensuite y par $\frac{225}{4x}$ et xy par $\frac{225}{4}$ et on a :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{225}{4} + 32x + 32 \times \frac{225}{4x} = \mathbf{\frac{225}{4} + 32x + \frac{1\ 800}{x}}$$

2. Étude des variations et des extrema éventuels de la fonction établie :
   On pense à préciser le **domaine de définition** de la fonction, puis on la dérive pour étudier ses variations et étudier l'existence d'un extremum.

Étant donné que x représente la longueur du vase, il s'agit forcément d'un réel strictement positif, donc $x > 0$.

Or la fonction $\mathcal{A}$ est bien définie sur $]0 ; +\infty[$, elle est également dérivable sur cet intervalle. On a pour tout $x >$:

$$\mathcal{A}'(x) = 32 - \frac{1\ 800}{x^2} \implies \mathcal{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{\frac{32x^2 - 1\ 800}{x^2}}$$

Pour étudier le signe de $\mathcal{A}'(x)$, on remarque que le dénominateur est toujours strictement positif. On s'intéresse donc au signe du numérateur :

$$32x^2 - 1\ 800 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 56,25 \Leftrightarrow x \in \{-7,5 ; +7,5\}$$

x	0		7.5		$+\infty$
Signe de $32x^2 - 1\ 800$		$-$	0	$+$	
Signe de x^2	0	$+$		$+$	
$\mathcal{A}'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\mathcal{A}$	$\Vert$	$\searrow$	$\mathcal{A}(7.5)$	$\nearrow$	

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

3. Retour au problème et conclusion :
   On exploite maintenant les variations obtenues pour répondre à la question.

   D'après le tableau de variations, le vase a une surface en verre minimale si $x = 7{,}5$ cm.

   On a alors $y = \dfrac{225}{4x} = \dfrac{225}{4 \times 7{,}5} = 7{,}5$.

   Ainsi, la surface en verre est minimale (pour le volume donné) si le vase a une base carrée de côté $7,5$ cm, et de hauteur 16 cm.

Méthode 3 : Établir une inégalité

Énoncé :

Soit f la fonction définie sur $I = [-13\ ;\ 2]$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x^2 + 6}$.
Donner un encadrement de f si $1 \leqslant x \leqslant 2$.

On va étudier les variations de f sur I en calculant sa dérivée.

La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc bien définie et dérivable sur I et on pose $x \in I$:

$$u(x) = -2x^2 + x + 1 \qquad\qquad v(x) = x^2 + 6$$

$$u'(x) = -4x + 1 \qquad\qquad v'(x) = 2x$$

Ainsi on a pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{(-4x+1)\left(x^2+6\right) - \left(-2x^2+x+1\right)(2x)}{\left(x^2+6\right)^2} \implies f'(x) = \frac{-4x^3 - 24x + x^2 + 6 - \left(-4x^3 + 2x^2 + 2x\right)}{\left(x^2+6\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^3 + x^2 - 24x + 6 + 4x^3 - 2x^2 - 2x}{\left(x^2+6\right)^2} \implies \mathbf{f'(x) = \frac{-x^2 - 26x + 6}{\left(x^2+6\right)^2}}$$

On peut ensuite étudier le signe de $f'(x)$.
On remarque d'abord que le dénominateur est toujours strictement positif. On s'intéresse donc au signe du numérateur :

$$\Delta = (-26)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = \mathbf{700}$$

On a donc les racines suivantes :

$$x_1 = \frac{26 - \sqrt{700}}{2 \times (-1)} = \mathbf{-13 - 5\sqrt{7} < -13} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{26 + \sqrt{700}}{2 \times (-1)} = \mathbf{-13 + 5\sqrt{7} \approx 0,23}$$

On calcule également les valeurs utiles :

$$f(-13) = -2 \qquad\qquad f(1) = 0 \qquad\qquad f(2) = -0{,}5$$

On peut donc établir le tableau de variations de f :

x	-13		$-13+5\sqrt{7}$		1		2
Signe de $-x^2 - 26x + 6$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $\left(x^2+6\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
f	-2	$\nearrow$	$f\left(-13+5\sqrt{7}\right)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-0.5

Finalement, on peut lire sur le tableau de variations que si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $-0,5 \leqslant f(x) \leqslant 0$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce document sans l'autorisation expresse de l'autrice.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »