Suites arithmétiques et géométriques

A) Suites arithmétiques

Définition 1 : Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est appelée **arithmétique** si elle est de la forme :

$$\mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$$

Où r est un réel appelé **raison** de la suite.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} \cdots$$

Propriété 1 : Formule explicite d'une suite arithmétique

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0, on peut calculer **directement** le n-ème terme avec la formule :

$$\mathbf{u_n = u_0 \ + \ r \times n}$$

Exemple(s) : Une usine fabrique 340 cartes électroniques par mois.
Pour augmenter leur production, ils achètent chaque mois une nouvelle machine qui permet de fabriquer 15 cartes de plus.

Si on note u_n le nombre de cartes fabriquées le n-ème mois, alors :

$$\begin{cases} u_0 = 340 \\ u_{n+1} = u_n + 15 \end{cases}$$

(u_n) est donc une **suite arithmétique** de raison 15.

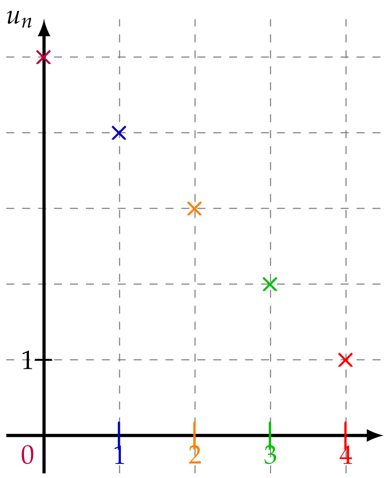
On veut savoir combien on fabriquera de cartes au bout de 24 mois :

$$u_{24} = 340 \ + \ 15 \times 24 = \mathbf{700}$$

Propriété 2 : Représentation graphique d'une suite arithmétique

Si on représente graphiquement une suite arithmétique, on obtient un nuage de **points alignés**.

Exemple(s) : Soit (u_n) telle que : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 1 \end{cases}$
Il s'agit bien d'une suite arithmétique de raison -1.



$u_0 = 5$

$u_1 = u_0 - 1 = 5 - 1 = \mathbf{4}$

$u_2 = u_1 - 1 = 4 - 1 = \mathbf{3}$

$u_3 = u_2 - 1 = 3 - 1 = \mathbf{2}$

$u_1 = u_3 - 1 = 2 - 1 = \mathbf{1}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 3 : Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- Si $r > 0$, alors (u_n) est **croissante** ;
- Si $r < 0$, alors (u_n) est **décroissante** ;
- Si $r = 0$, alors (u_n) est **constante**.

Exemple(s) :

- $u_{n+1} = u_n - 4$: (u_n) est **décroissante**
- $v_{n+1} = v_n + 7{,}3$: (v_n) est **croissante**

B) Suites géométriques

Définition 2 : Suites géométriques

Une suite (u_n) est appelée **géométrique** si elle est de la forme :

$$\mathbf{u_{n+1} = u_n \times q}$$

Où q est un réel appelé **raison** de la suite.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} \cdots$$

Exemple(s) : On met 1 000 € sur un livret A, dont les intérêts composés sont de 3 % par an.

Si on note u_n la somme d'argent sur le livret A après n années, on a :

$$\begin{cases} u_0 = 1\ 000 \\ u_{n+1} = u_n \times 1{,}03 \end{cases}$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $1{,}03$ et de terme initial 1 000.

Propriété 4 : Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$:

- Si $q > 1$, alors (u_n) est **croissante** ;
- Si $q < 1$, alors (u_n) est **décroissante** ;
- Si $q = 1$, alors (u_n) est **constante**.

Remarque : Dans le cas où $q < 0$, la suite n'est pas monotone (elle alterne entre valeurs positives et négatives).

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »