Équations et inéquations

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- Le vocabulaire des (in)équations.
- Les règles de calculs pour résoudre une (in)équation.
- La méthode pour résoudre une inéquation-produit (ou inéquation-quotient).

Je dois **savoir-faire** :

- Résoudre une équation du premier degré.
- Résoudre une équation produit-nul (ou quotient-nul).
- Résoudre une inéquation du premier degré.
- Résoudre une inéquation-produit (ou inéquation-quotient) à l'aide d'un tableau de signes.

A) Rappels sur les équations

1. Vocabulaire

Définition 1 : Équation

Une **équation** d'**inconnue** x est une égalité dans laquelle intervient un nombre dont on ne connaît pas la valeur (et qu'on note donc x).

Définition 2 : Résoudre une équation

Résoudre dans un ensemble $\mathcal{E}$ une équation d'inconnue x, c'est déterminer **toutes les valeurs** que peut prendre x dans $\mathcal{E}$ telles que **l'égalité soit vraie**. Ces valeurs sont appelées **solutions de l'équation**.

On dit que **deux équations sont équivalentes** lorsqu'elles ont les **mêmes solutions**.

Exemple(s) :

- L'équation $x^2+x-2=0$ (E) :

  Admet 1 et -2 comme solutions dans $\mathbb{R}$. En effet :

  $$1^2+1-2=1+1-2=0 \qquad \text{et} \qquad (-2)^2+(-2)-2=4-2-2=0$$

  (On pourra montrer en 1ère que ce sont les deux seules solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.)
- L'équation $2x+3=-x+6$ (E') admet 1 comme unique solution (on reverra après pourquoi).
- Les équations (E) et (E') ne sont donc pas équivalentes.

2. Équations du premier degré

Propriété 1 : Calculer avec les équations

On peut appliquer les manipulations suivantes à une équation pour produire une équation équivalente :

- Ajouter (ou soustraire) un **même nombre** aux **deux membres** de l'équation.
- Multiplier (ou diviser) par un **même nombre** les **deux membres** de l'équation.
- Simplifier, développer, factoriser, réduire l'un des deux membres de l'équation.

Exemple(s) : Reprenons l'équation (E') de tout à l'heure : $2x+3=-x+6$

Elle est équivalente à l'équation $2x+3+x=-x+6+x$ (ajout aux deux membres).

Et donc à l'équation $3x+3=6$ (simplifier). On peut noter : $(\mathbf{E'}) \Leftrightarrow \mathbf{3x+3=6}$.

On peut continuer ainsi de suite :
$(E') \Leftrightarrow 3x+3=6 \Leftrightarrow 3x+3-3=6-3 \Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow 3x\div 3=3\div 3 \Leftrightarrow \mathbf{x=1}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Méthode 1 : Résoudre une équation du premier degré

En utilisant les propriétés d'équivalences vues ci-dessues, on transforme petit à petit l'équation initiale en une équation équivalente jusqu'à arriver à la forme $x = k$ en isolant l'inconnue dans un membre de l'équation (généralement à gauche mais parfois il est plus pratique de l'isoler à droite, et en mathématiques, $x = k$ ou $k = x$ sont équivalentes). Pour cela :

1. On « met » tous les termes en x dans un membre de l'équation ;
2. On « met » toutes les constantes (termes sans x) dans l'autre membre de l'équation ;
3. Il faut en général finir par diviser par la constante en facteur de x.

Exemple(s) :

$3x+4=10$ $3x+4-4=10-4$ $3x=6$ $3x\div 3=6\div 3$ $\mathbf{x=2}$	$5y-3=17$ $5y-3+3=17+3$ $5y=20$ $5y\div 5=20\div 5$ $\mathbf{y=4}$
$7+\frac{x}{3}=9$ $7+\frac{x}{3}-7=9-7$ $\frac{x}{3}=2$ $\frac{x}{3}\times 3=2\times 3$ $\mathbf{x=6}$	$\frac{2x-5}{4}=1,5$ $\frac{2x-5}{4}\times 4=1,5\times 4$ $2x-5=6$ $2x-5+5=6+5$ $2x=11$ $\mathbf{x}=11\div 2=\mathbf{5,5}$

3. Équations produit-nul (ou quotient-nul)

La résolution de certaines équations plus complexes (par exemple équations du second degré) peut parfois se ramener à celle d'équations du premier degré, en regroupant tous les termes dans un même membre et en essayant de factoriser ce membre. On obtient alors une **équation produit-nul** ou une **équation quotient-nul**.

Propriété 2 : Équation produit-nul

Un produit de deux réels est nul **si et seulement si** au moins l'un de ses deux facteurs est nul. Autrement dit :

$$A(x)\times B(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x)=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad B(x)=0$$

Exemple(s) :

$(x-2)(x+5)=0$ $x-2=0$ | $x+5=0$ $x-2+2=0+2$ | $x+5-5=0-5$ $\mathbf{x=2}$ | $\mathbf{x=-5}$ $\mathcal{S}=\{2;-5\}$	$(x+4)(2x-3)=0$ $x+4=0$ | $2x-3=0$ $x+4-4=0-4$ | $2x-3+3=0+3$ $\mathbf{x=-4}$ | $2x=3$ $2x\div 2=3\div 2$ $\mathbf{x=1,5}$ $\mathcal{S}=\{-4;1,5\}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 3 : Équation quotient-nul

Un quotient de deux réels est nul **si et seulement si** son numérateur est nul et son dénominateur est non nul. Autrement dit :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A(x) = 0 \ \ \underline{\text{et}} \ \ B(x) \neq 0$$

Les valeurs de x telles que $B(x) = 0$ sont appelées **valeurs interdites** du quotient.

Exemple(s) : L'équation $\dfrac{5x-1}{x+1} = 0$:

Admet pour valeur interdite $-\mathbf{1}$. Elle est donc équivalente à :

$$5x - 1 = 0 \ \text{ et } \ x \neq -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \ \text{ et } \ x \neq -1$$

Comme $\frac{1}{5}$ est différent de -1, l'unique solution de cette équation est donc bien $\frac{1}{5}$.

B) Inéquations

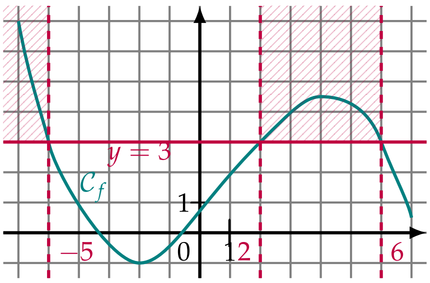
Définition 3 : Inéquation

Une **inéquation** d'**inconnue** x est une inégalité dans laquelle intervient une inconnue x.
À la différence des équations, la solution d'une inéquation est plus généralement un intervalle (ou une union d'intervalles).

On dit que **deux inéquations sont équivalentes** lorsqu'elles ont le **même ensemble de solutions**.

Exemple(s) :

On a vu au **Chapitre 4** les résolutions **graphiques** d'inéquations :



Résoudre l'équation $f(x) \leqslant 3$ à l'aide du graphique ci-contre :

On trace la droite d'équation $y = 3$ et on repère les points d'intersection avec $\mathcal{C}_f$.
On regarde ensuite sur quels intervalles la courbe est-elle au-dessus de la droite tracée :

$$\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -5] \cup [2\ ;\ 6]$$

On va désormais chercher à résoudre les inéquations de manière algébrique (par le calcul).

1. Règles de résolution des inéquations

Propriété 4 : Calculer avec les inéquations

On peut appliquer les manipulations suivantes à une inéquation pour produire une inéquation équivalente (similaires à celles pour les équations) :

- Ajouter (ou soustraire) un **même nombre** aux **deux membres** de l'inéquation.
- Multiplier (ou diviser) par un **même nombre** les **deux membres** de l'inéquation **MAIS ATTENTION !**
  - **Si on mutliplie (ou divise) par un nombre négatif non nul : il faut changer le sens de l'inégalité !**
  - Si on mutliplie (ou divise) par un nombre positif ou nul : on ne change pas le sens de l'inégalité.
- Simplifier, développer, factoriser, réduire l'un des deux membres de l'équation.

Méthode 2 : Résoudre une inéquation du premier degré

En utilisant les propriétés d'équivalences vues ci-dessues, on transforme petit à petit l'inéquation initiale en une inéquation équivalente jusqu'à arriver à une des formes suivantes :

$$x < k \qquad\qquad x \leqslant k \qquad\qquad x > k \qquad\qquad x \geqslant k$$

On peut également avoir une combinaison de ces formes (par exemple $a < x \leqslant b$).

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Exemple(s) : Résoudre l'inéquation suivante :

$$3x < 7x + 12$$

$\Leftrightarrow\ 3x - 7x < 7x + 12 - 7x$ On **soustrait** dans les deux membres

$\Leftrightarrow\ -4x < 12$ On **simplifie** les deux membres

$\Leftrightarrow\ \dfrac{-4x}{-4} > \dfrac{12}{-4}$ On **divise** par un nombre négatif donc on change de sens !

2. Inéquation-produit ou inéquation-quotient

Méthode 3 : Signe d'un produit et inéquation-produit

Pour étudier le signe d'un produit $A(x) \times B(x) \times \ldots$, on détermine le signe de chaque facteur et on applique la règle des signes d'un produit à l'aide d'un tableau de signes bilan.

Exemple(s) : Résoudre l'inéquation-produit suivante :

$$(x-6)(-2x+3) > 0$$

$x - 6 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 6 + 6 \geqslant 0 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x \geqslant 6}$

$-2x + 3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 3 - 3 \geqslant 0 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \geqslant -3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-2x}{-2} \leqslant \dfrac{-3}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x \leqslant 1,5}$

x	$-\infty$		1.5		6		$+\infty$
Signe de $x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-2x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Au final, on a donc :

$$(x-6)(-2x+3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \in]\mathbf{1,5}\ ;\ \mathbf{6}[$$

On peut aussi dire que l'ensemble S des solutions est $\mathbf{S} =]\mathbf{1,5}\ ;\ \mathbf{6}[$.

Méthode 4 : Signe d'un quotient et inéquation-quotient

Pour étudier le signe du quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ on détermine le signe du numérateur et du dénominateur et on dresse un tableau de signe. Attention, les zéros du dénominateur sont des **valeurs interdites** !

Exemple(s) :

Résoudre l'inéquation $\dfrac{-2x+4}{x-1} \leqslant 0$:

$-2x + 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x > -4 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x < 2}$

$x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x > 1}$

Finalement l'ensemble S des solutions est :

$$\mathbf{S} =]-\infty\ ;\ \mathbf{1}[\cup [\mathbf{2}\ ;\ +\infty[$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du quotient		-	‖	$+$	0	-	

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »