

Trigonométrie

À la fin de ce chapitre...

<p>Je dois connaître :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Le cercle trigonométrique • Les mesures d'angles en radian • Les fonctions sinus et cosinus et leurs propriétés • Les valeurs remarquables des cosinus et sinus 	<p>Je dois savoir-faire :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Placer un point sur le cercle trigonométrique • Déterminer un sinus ou un cosinus d'une valeur remarquable • Faire le lien entre le cercle trigonométrique et les fonctions sinus et cosinus • Utiliser les propriétés des fonctions sinus et cosinus
--	---

A) Enroulement sur le cercle trigonométrique

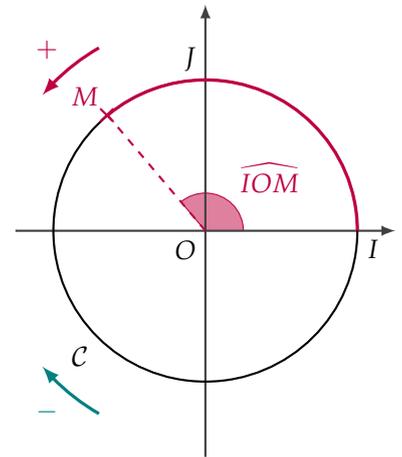
On se place dans un repère **orthonormé** $(O; I; J)$.

Définition 1 : Cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** \mathcal{C} est le cercle de centre O , de rayon 1 et **orienté** dans le **sens direct**, noté $+$, c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Remarques :

- Il existe deux sens de parcours pour un point M sur \mathcal{C} :
 - le **sens direct** (noté $+$) ou **sens trigonométrique** ;
 - le **sens indirect** (noté $-$), sens des aiguilles d'une montre.
- Le **périmètre** de \mathcal{C} vaut
- La **longueur de l'arc** de cercle \widehat{IM} est **proportionnelle** à l'angle \widehat{IOM} en degré qui intercepte cet arc :



Longueur de l'arc	2π	\widehat{IM}
Angle \widehat{IOM}	360°	\widehat{IOM}

$$\widehat{IM} = \frac{\pi}{180} \times \widehat{IOM}$$

Propriété 1 : Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

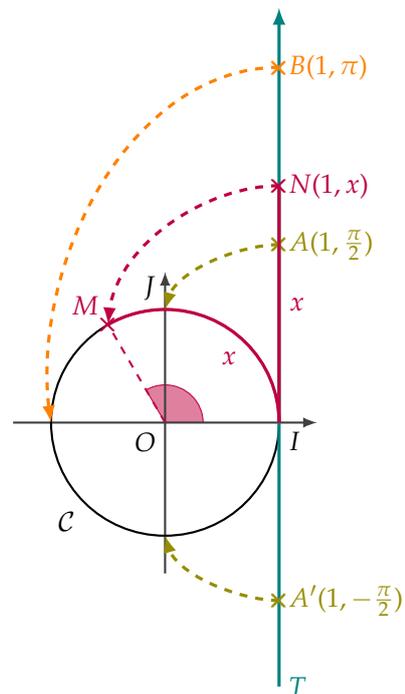
On considère le cercle trigonométrique \mathcal{C} et sa tangente T au point I , qui représente la **droite des réels**.

On imagine que l'on **enroule** cette droite autour du cercle trigonométrique.

À tout réel x , on associe donc le point $N(1, x)$ de T . Par enroulement, ce point N vient se superposer à un unique point M du cercle trigonométrique. On dit que ce point M est **associé** au réel x , ou encore que M est **l'image** de x sur le cercle \mathcal{C} .

Remarques :

- Lorsque x est positif, on parcourt le cercle dans le sens, lorsque x est négatif, on le parcourt dans le sens
- Chaque nombre réel x est associé à un unique point M du cercle trigonométrique, **par contre** chaque point du cercle est l'image d'une infinité de réels x , espacés les uns des autres de 2π !
Plus précisément, tous les réels de la forme $x + 2k\pi$ ont pour image le **même point** M , avec $k \in \mathbb{Z}$, où k représente le nombre de « tours » supplémentaires.



Définition 2 : Mesure d'un angle en radians

Soit M un point du cercle trigonométrique \mathcal{C} , associé au réel x .

On dit que x est une **mesure en radian** de l'angle au centre \widehat{IOM} , orienté de I vers M .

Propriété 2 :

Si $x \in [0; \pi[$, alors la mesure en radians de l'angle au centre \widehat{IOM} est **proportionnelle** à sa mesure en degrés :

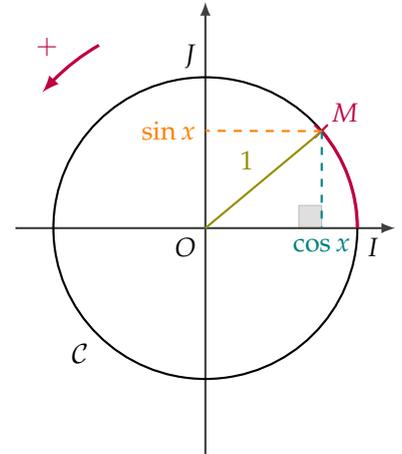
Mesure en radians	π	x
Mesure en degrés	180°	\widehat{IOM}

B) Sinus et cosinus d'un nombre réel

Définition 3 : Lien entre cercle trigonométrique et sinus/cosinus

Soit x un réel et M son point associé sur \mathcal{C} .

- L' **abscisse de point M** dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ est le **cosinus** du réel x , noté $\cos x$;
- L' **ordonnée de point M** dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ est le **sinus** du réel x , noté $\sin x$;
- Ainsi, les coordonnées du point M sont $(\cos x ; \sin x)$.



Propriété 3 :

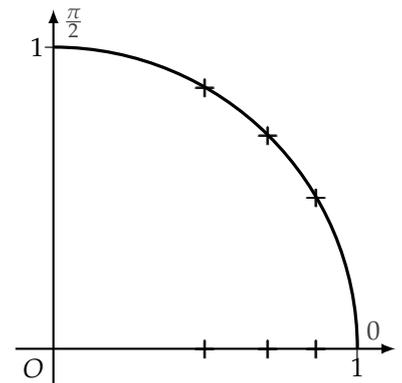
Pour tout réel x on a :

- **Propriété d'encadrement :**
- **Relation fondamentale :**

Remarque : Cette définition est bien cohérente avec celle vue au collège si on considère le triangle rectangle tracé ci-dessus.

Propriété 4 : Valeurs remarquables - À CONNAÎTRE PAR CŒUR !

Angle \widehat{IOM} en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Réel $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ associé (en radian)					
$\cos \widehat{IOM} = \cos x$					
$\sin \widehat{IOM} = \sin x$					



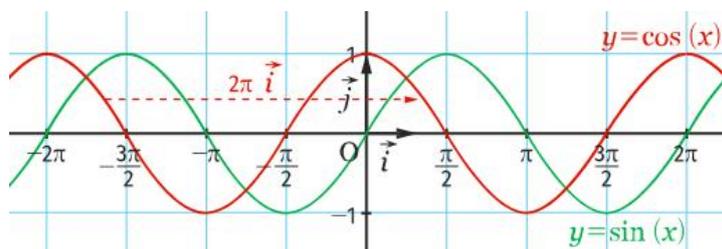
C) Fonctions sinus et cosinus

Définition 4 : Fonctions trigonométriques

- La fonction **cosinus**, notée \cos , est définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto \cos x$.
- La fonction **sinus**, notée \sin , est définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto \sin x$.

Propriété 5 : Représentations graphiques

Le parcours du point $M(\cos x ; \sin x)$ sur le cercle trigonométrique permet de construire point par point les courbes représentatives de \cos et de \sin (voir animation GeoGebra). On dit que les courbes sont des **sinusoïdes**.



Propriété 6 : Parité

- La fonction **cosinus** est **paire** :
- La fonction **sinus** est **impaire** :

En effet, les points associés à x et à $-x$ sur le cercle trigonométrique sont **symétriques par rapport à l'axe des abscisses**.

Ils ont donc

Propriété 7 : Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π . Ainsi, pour tout réel x on a :

..... et

En effet, les points du cercle trigonométrique associés à x et à $x + 2\pi$ sont confondus (voir remarques de la Propriété 1).

Propriété 8 : Dérivation

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

Moyen mnémotechnique : Quand on dérive on « tombe » dans le sens indirect :

