Trigonométrie

À la fin de ce chapitre...

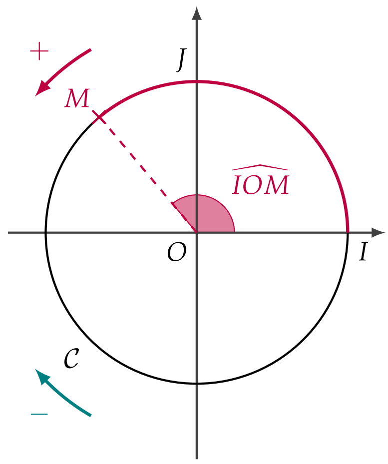
Je dois **connaître** :	Je dois **savoir-faire** :
• Le cercle trigonométrique • Les mesures d'angles en radian • Les fonctions sinus et cosinus et leurs propriétés • Les valeurs remarquables des cosinus et sinus	• Placer un point sur le cercle trigonométrique • Déterminer un sinus ou un cosinus d'une valeur remarquable • Faire le lien entre le cercle trigonométrique et les fonctions sinus et cosinus • Utiliser les propriétés des fonctions sinus et cosinus

A) Enroulement sur le cercle trigonométrique

On se place dans un repère **orthonormé** $(O; I; J)$.

Définition 1 : Cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O, de rayon 1 et **orienté** dans le **sens direct**, noté $+$, c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Remarques :

- Il existe deux sens de parcours pour un point M sur $\mathcal{C}$:
  - le **sens direct** (noté $+$) ou **sens trigonométrique** ;
  - le **sens indirect** (noté $-$), sens des aiguilles d'une montre.
- Le **périmètre** de $\mathcal{C}$ vaut $2\pi \times 1 = 2\pi$
- La **longueur de l'arc** de cercle $\widehat{IM}$ est **proportionnelle** à l'angle $\widehat{IOM}$ en degré qui intercepte cet arc :

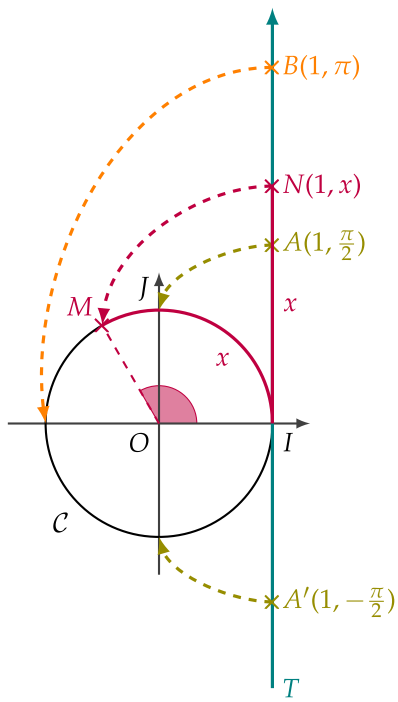
Longueur de l'arc	2π	$\widehat{IM}$
Angle $\widehat{IOM}$	$360°$	$\widehat{IOM}$

$$\widehat{IM} = \frac{\pi}{180} \times \widehat{IOM}$$

Propriété 1 : Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ et sa tangente T au point I, qui représente la **droite des réels**.
On imagine que l'on **enroule** cette droite autour du cercle trigonométrique.

À tout réel x, on associe donc le point $N(1, x)$ de T. Par enroulement, ce point N vient se superposer à un unique point M du cercle trigonométrique. On dit que ce point M est **associé** au réel x, ou encore que M est l'**image** de x sur le cercle $\mathcal{C}$.



Remarques :

- Lorsque x est positif, on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique , lorsque x est négatif, on le parcourt dans le sens indirect .
- Chaque nombre réel x est associé à un unique point M du cercle trigonométrique, **par contre** chaque point du cercle est l'image d'une infinité de réels x, espacés les uns des autres de 2π !
  Plus précisément, tous les réels de la forme $x + 2k\pi$ ont pour image le **même point** M, avec $k \in \mathbb{Z}$, où k représente le nombre de « tours » supplémentaires.

Définition 2 : Mesure d'un angle en radians

Soit M un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, associé au réel x.
On dit que x est une **mesure en radian** de l'angle au centre $\widehat{IOM}$, orienté de I vers M.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 2 :

Si $x \in [0;\pi[$, alors la mesure en radians de l'angle au centre $\widehat{IOM}$ est **proportionnelle** à sa mesure en degrés :

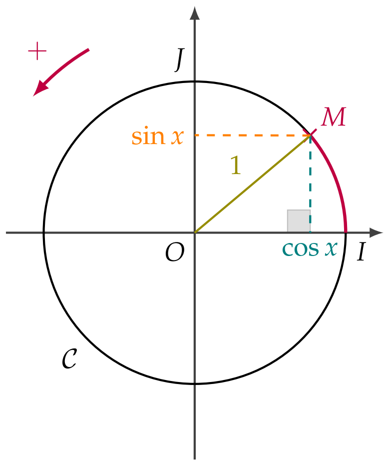
Mesure en radians	π	x
Mesure en degrés	$180°$	$\widehat{IOM}$

B) Sinus et cosinus d'un nombre réel

Définition 3 : Lien entre cercle trigonométrique et sinus/cosinus

Soit x un réel et M son point associé sur $\mathcal{C}$.

- L' **abscisse de point** M dans le repère orthonormé $(O;I;J)$ est le **cosinus** du réel x, noté $\cos \mathbf{x}$;
- L' **ordonnée de point** M dans le repère orthonormé $(O;I;J)$ est le **sinus** du réel x, noté $\sin \mathbf{x}$;
- Ainsi, les coordonnées du point M sont $(\cos x \; ; \; \sin x)$.



Propriété 3 :

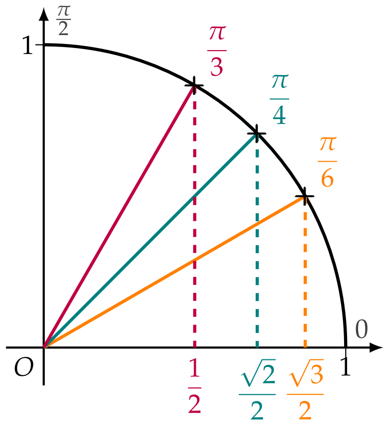
Pour tout réel x on a :

- **Propriété d'encadrement :** $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- **Relation fondamentale :** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Remarque : Cette définition est bien cohérente avec celle vue au collège si on considère le triangle rectangle tracé ci-dessus.

Propriété 4 : Valeurs remarquables - À CONNAÎTRE PAR CŒUR !

Angle $\widehat{IOM}$ en degrés	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Réel $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ associé (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \widehat{IOM} = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \widehat{IOM} = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



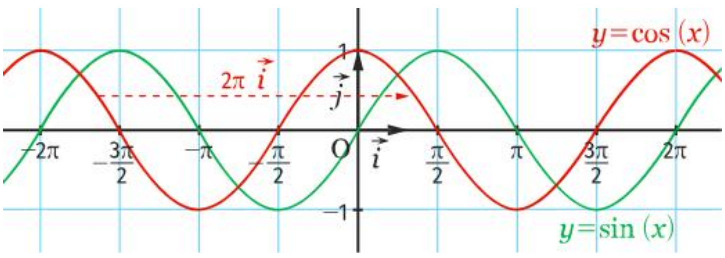
C) Fonctions sinus et cosinus

Définition 4 : Fonctions trigonométriques

- La fonction **cosinus**, notée cos, est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos x$.
- La fonction **sinus**, notée sin, est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin x$.

Propriété 5 : Représentations graphiques

Le parcours du point $M(\cos x \; ; \; \sin x)$ sur le cercle trigonométrique permet de construire point par point les courbes représentatives de cos et de sin (voir animation GeoGebra). On dit que les courbes sont des **sinusoïdes**.



Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 6 : Parité

- La fonction **cosinus** est **paire** : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction **sinus** est **impaire** : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x)$

En effet, les points associés à x et à $-x$ sur le cercle trigonométrique sont **symétriques par rapport à l'axe des abscisses**.

Ils ont donc des abscisses égales et des ordonnées opposées .

Propriété 7 : Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π. Ainsi, pour tout réel x on a :

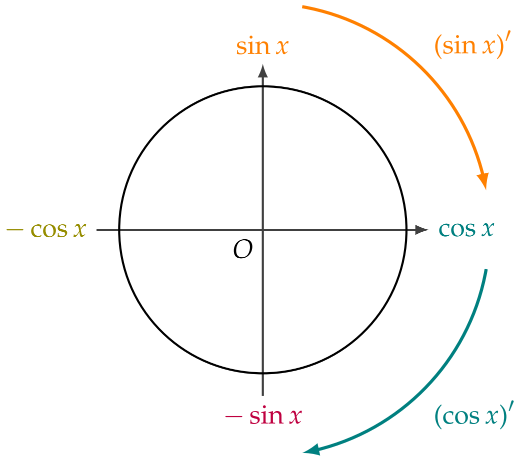
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

En effet, les points du cercle trigonométrique associés à x et à $x + 2\pi$ sont confondus (voir remarques de la Propriété 1).

Propriété 8 : Dérivation

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

Moyen mnémotechnique : Quand on dérive on « tombe » dans le sens indirect :



Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »