

Coordonnées de vecteurs

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- Les définitions de repère du plan et coordonnées d'un vecteur
- La norme d'un vecteur d'après ses coordonnées
- Les propriétés des vecteurs avec les coordonnées

Je dois **savoir-faire** :

- Lire les coordonnées d'un vecteur et tracer un vecteur de coordonnées données dans un repère
- Calculer les coordonnées d'un vecteur d'après les coordonnées de ses extrémités
- Calculer la norme d'un vecteur avec ses coordonnées
- Appliquer les opérations sur un vecteur
- Résoudre des problèmes de géométrie avec des vecteurs

A) Coordonnées d'un vecteur

Définition 1 : Repère du plan

Un **repère du plan** est défini par trois points O , I et J non alignés. On dit que le repère $(O; I; J)$ est **orthonormé** si $OI = OJ$ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

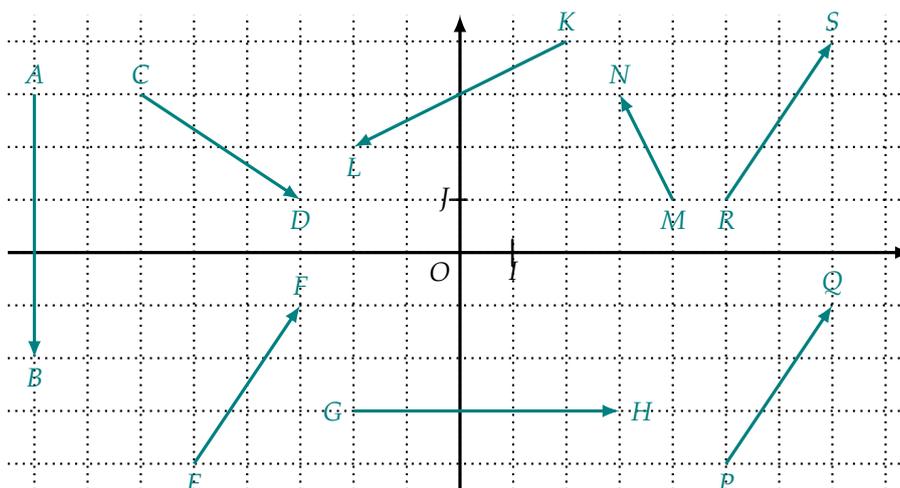
Le point O est l'**origine** du repère, (OI) est l'**axe des abscisses** et (OJ) est l'**axe des ordonnées**. Chaque point du plan peut être représenté par ses **coordonnées** dans le repère.

Définition 2 : Coordonnées d'un vecteur

Soit \vec{u} un vecteur dans un repère $(O; I; J)$ et soient x et y deux réels tels que l'on puisse écrire $\vec{u} = x\vec{OI} + y\vec{OJ}$.

On peut alors noter $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et dire que le vecteur \vec{u} a pour **coordonnées** x et y dans la **base** $(\vec{OI}; \vec{OJ})$.

Exemple(s) : Le repère $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$ ci-dessous est orthonormé :



Vecteur	\vec{CD}							
Coordonnées	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$							

Propriété 1 : Égalité de vecteurs

Soient $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$ un repère, et $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

\vec{u} et \vec{v} sont **égaux** si et seulement si leurs coordonnées sont égales deux à deux. Autrement dit :

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Exemple(s) : Dans l'exemple précédent, quels sont les vecteurs égaux ?

.....

.....

Propriété 2 : Calculer les coordonnées d'un vecteur à partir de ses extrémités

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère. Le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées :

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Propriété 3 : Coordonnées par une translation

Soit $M(x_M; y_M)$ un point et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

Si le point N est l'image du point M par la translation de vecteur \vec{u} , alors il a pour coordonnées :

$$N(x_M + x ; y_M + y)$$

Exemple(s) :

1. Soient $A(-3, -2)$ et $B(1, 4)$. Quelles sont les coordonnées du vecteur \vec{AB} ? Vérifier sur le graphique ci-contre :

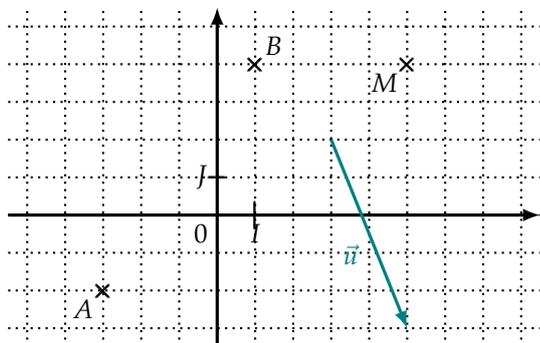
.....

.....

2. Soit $N(x_N; y_N)$ l'image du point $M(5; 4)$ par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du point N :

.....

.....



Propriété 4 : Norme d'un vecteur

Soit $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$ un repère **orthonormé** et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dont les coordonnées sont exprimées dans la base $(\vec{OI}; \vec{OJ})$.

La norme de \vec{u} est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemple(s) : En reprenant les exemples de la fin de la page 1 :

Vecteur	\vec{CD}	\vec{GH}	\vec{KL}	\vec{MN}
Coordonnées	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Norme				

B) Opérations sur les vecteurs

Propriété 5 : Somme de vecteurs

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Alors le vecteur somme de \vec{u} et \vec{v} a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$.

Exemple(s) : Soient $\vec{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{KL} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Alors le vecteur $\vec{w} = \vec{CD} + \vec{KL}$ a pour coordonnées :

$$\vec{w} = \vec{CD} + \vec{KL} = \dots\dots\dots$$

Propriété 6 : Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple(s) : Soient $\vec{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $k = -\frac{1}{6}$. Alors le vecteur $\vec{w} = k\vec{CD}$ a pour coordonnées :

$$\vec{w} = k\vec{CD} = \dots\dots\dots$$

Propriété 7 : Colinéarité

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Alors \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaire** si et seulement si $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$.

Exemple(s) : Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$:

- donc \vec{u} et \vec{v} sont
- donc \vec{u} et \vec{w} sont

Démonstration :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C) Application à la géométrie

Rappel : Soient A, B, C et D quatre points du plan. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.

Propriété 8 : Parallélisme

Soient $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ et $D(x_D; y_D)$. Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si $(x_B - x_A)(y_D - y_C) - (x_D - x_C)(y_B - y_A) = 0$.

Rappel : Soient A, B et C trois points du plan. A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.

Propriété 9 : Alignement

Soient $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$. Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si $(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) = 0$.

Définition 3 : Équation cartésienne de droite

Soit (d) une droite du plan.

On peut alors trouver trois réels a, b et c avec $(a, b) \neq (0, 0)$ (c'est-à-dire que a et b ne peuvent pas valoir 0 *en même temps*) tels que :

$$M(x; y) \in (d) \iff ax + by + c = 0$$

On dit alors que $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** de la droite (d) .

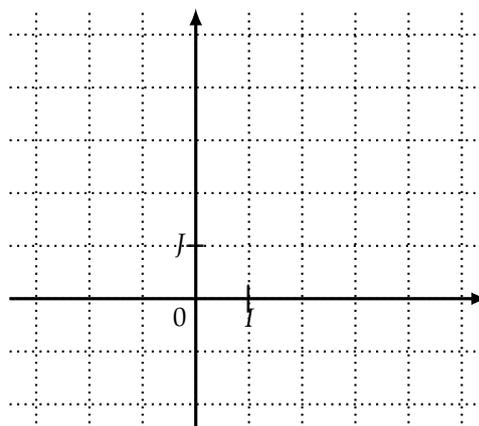
Exemple(s) :

- Soit (d) la droite d'équation $-2x + y - 3 = 0$:

.....

- Soit (d') la droite d'équation $2x + 6 = 0$:

.....



Définition 4 : Vecteur directeur

Soient (d) une droite et A et B deux points du plan.

Si $A \in (d)$ et $B \in (d)$, alors on dit que \vec{AB} est un **vecteur directeur** de la droite (d) .

Propriété 10 : Vecteur directeur et colinéarité

Soit (d) une droite du plan et \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

\vec{u} et \vec{v} sont deux **vecteurs directeurs** de (d) si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires**.

Propriété 11 : Vecteur directeur et équation cartésienne

Soit (d) une droite du plan ayant pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Alors $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d) .

Exemple(s) : Donner un vecteur directeur de chacune des droites de l'exemple précédent :

.....

Propriété 12 : Parallélisme

Soient (d) et (d') deux droites du plan, \vec{u} est un vecteur directeur de (d) et \vec{v} un vecteur directeur de (d') .

(d) et (d') sont **parallèles** si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires**.

Exemple(s) :

$(d) : 1x + 2y + 2 = 0$

$(d') : 4x - 3y + 16 = 0$

$(d'') : -2x - 4y + 7 = 0$

.....
