Coordonnées de vecteurs

À la fin de ce chapitre...

Je dois **connaître** :

- Les définitions de repère du plan et coordonnées d'un vecteur
- La norme d'un vecteur d'après ses coordonnées
- Les propriétés des vecteurs avec les coordonnées

Je dois **savoir-faire** :

- Lire les coordonnées d'un vecteur et tracer un vecteur de coordonnées données dans un repère
- Calculer les coordonnées d'un vecteur d'après les coordonnées de ses extrémités
- Calculer la norme d'un vecteur avec ses coordonnées
- Appliquer les opérations sur un vecteur
- Résoudre des problèmes de géométrie avec des vecteurs

A) Coordonnées d'un vecteur

Définition 1 : Repère du plan

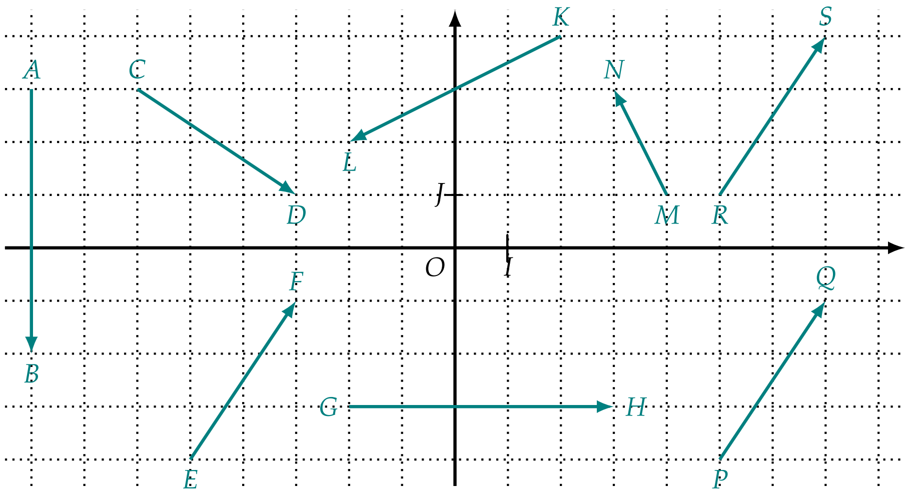
Un **repère du plan** est défini par trois points O, I et J non alignés. On dit que le repère $(O; I; J)$ est **orthonormé** si $OI = OJ$ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Le point O est l'**origine** du repère, (OI) est l'**axe des abscisses** et (OJ) est l'**axe des ordonnées**. Chaque point du plan peut être représenté par ses **coordonnées** dans le repère.

Définition 2 : Coordonnées d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur dans un repère $(O; I; J)$ et soient x et y deux réels tels que l'on puisse écrire $\vec{u} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.
On peut alors noter $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et dire que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** x et y dans la **base** $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$.

Exemple(s) : Le repère $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ ci-dessous est orthonormé :



Vecteur	$\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{GH}$	$\overrightarrow{KL}$	$\overrightarrow{MN}$	$\overrightarrow{PQ}$	$\overrightarrow{RS}$
Coordonnées	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Propriété 1 : Égalité de vecteurs

Soient $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ un repère, et $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **égaux** si et seulement si leurs coordonnées sont égales deux à deux. Autrement dit :

$$\vec{u}=\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Exemple(s) : Dans l'exemple précédent, quels sont les vecteurs égaux ?

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$$

Propriété 2 : Calculer les coordonnées d'un vecteur à partir de ses extrémités

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points d'un repère. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$$

Propriété 3 : Coordonnées par une translation

Soit $M(x_M;y_M)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur du plan.
Si le point N est l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors il a pour coordonnées :

$$N(x_M + x \ ; \ y_M + y)$$

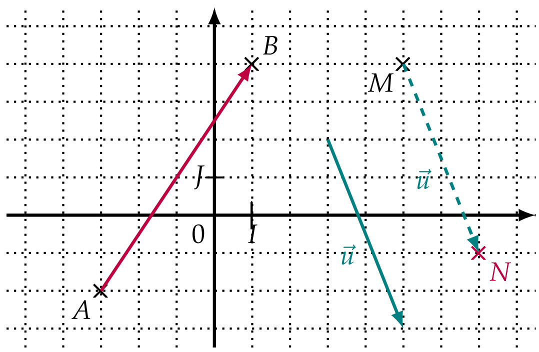
Exemple(s) :

1. Soient $A(-3,-2)$ et $B(1,4)$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$? Vérifier sur le graphique ci-contre :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1-(-3)\\4-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3\\4+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

2. Soit $N(x_N;y_N)$ l'image du point $M(5;4)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du point N :

$$(x_N;y_N) = (x_M + x_{\vec{u}} \ ; \ y_M + y_{\vec{u}}) = (5+2 \ ; \ 4+(-5)) = (\mathbf{7};\mathbf{-1})$$



Propriété 4 : Norme d'un vecteur

Soit $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ un repère **orthonormé** et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur dont les coordonnées sont exprimées dans la base $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.
La norme de $\vec{u}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Exemple(s) : En reprenant les exemples de la fin de la page 1 :

Vecteur	$\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{GH}$	$\overrightarrow{KL}$	$\overrightarrow{MN}$
Coordonnées	$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$
Norme	$\sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{\mathbf{13}}$	$\sqrt{5^2+0^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$	$\sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{\mathbf{20}}$	$\sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{\mathbf{5}}$

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

B) Opérations sur les vecteurs

Propriété 5 : Somme de vecteurs

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$. Alors le vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$.

Exemple(s) : Soient $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$. Alors le vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées :

$$\vec{w}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{KL}=\begin{pmatrix}3+4\\-2+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$$

Propriété 6 : Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $k\in\mathbb{R}$. Alors le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $k\vec{u}=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Exemple(s) : Soient $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $k=-\frac{1}{6}$. Alors le vecteur $\vec{w}=k\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées :

$$\vec{w}=k\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\times 3\\-\frac{1}{6}\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Propriété 7 : Colinéarité

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaire** si et seulement si $x_1y_2-y_1x_2=0$.

Exemple(s) : Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\15\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}$:

- $3\times15-5\times9=45-45=\mathbf{0}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** .
- $3\times20-5\times10=60-50=\mathbf{10}\neq\mathbf{0}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont **non colinéaires** .

Démonstration :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Ainsi, on a $\begin{cases}x_2=kx_1\\y_2=ky_1\end{cases}$

On a alors :

$$x_1y_2-y_1x_2=x_1\times ky_1-y_1\times kx_1=kx_1y_1-kx_1y_1=0$$

C) Application à la géométrie

Rappel : Soient A, B, C et D quatre points du plan. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 8 : Parallélisme

Soient $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$.
Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si $(x_B-x_A)(y_D-y_C)-(x_D-x_C)(y_B-y_A)=0$.

Rappel : Soient A, B et C trois points du plan. A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Propriété 9 : Alignement

Soient $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$.
Les points A, B et C sont **alignés** si et seulement si $(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)=0$.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »

Définition 3 : Équation cartésienne de droite

Soit (d) une droite du plan.
On peut alors trouver trois réels a, b et c avec $(a,b) \neq (0,0)$ (c'est-à-dire que a et b ne peuvent pas valoir 0 *en même temps*) tels que :

$$M(x;y) \in (d) \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0$$

On dit alors que $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** de la droite (d).

Exemple(s) :

- Soit (d) la droite d'équation $-2x + y - 3 = 0$:

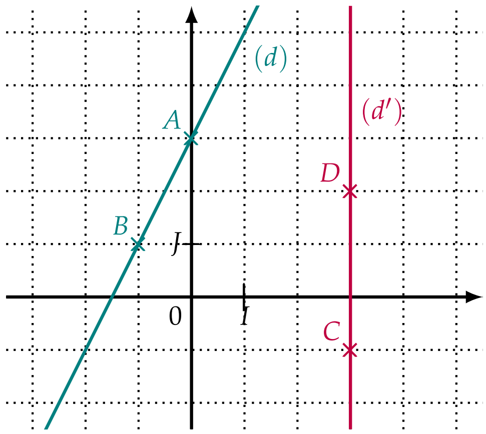
  Par exemple si $x = 0$ et $y = 3$ alors on a bien :
  $-2x + y - 3 = -2 \times 0 + 3 - 3 = 0$
  Donc le point $A(0,3) \in (d)$.

  De même si $x = -1$ alors il faut que y vérifie :
  $-2 \times (-1) + y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$
  Donc le point $B(-1,1) \in (d)$.

- Soit (d') la droite d'équation $2x + 6 = 0$:

  On doit forcément avoir $x = 3$ et y quelconque. Donc par exemple, les points suivants appartiennent à (d') :

  $$C(3,-1) \qquad \text{et} \qquad D(3,2)$$



Définition 4 : Vecteur directeur

Soient (d) une droite et A et B deux points du plan.
Si $A \in (d)$ et $B \in (d)$, alors on dit que $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite (d).

Propriété 10 : Vecteur directeur et colinéarité

Soit (d) une droite du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux **vecteurs directeurs** de (d) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

Propriété 11 : Vecteur directeur et équation cartésienne

Soit (d) une droite du plan ayant pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
Alors $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Exemple(s) : Donner un vecteur directeur de chacune des droites de l'exemple précédent :

- Droite (d) : $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{BA} = (-1) \times \vec{u}$
- Droite (d') : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui est colinéire au vecteur $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2} \times \vec{v}$

Propriété 12 : Parallélisme

Soient (d) et (d') deux droites du plan, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}$ un vecteur directeur de (d').
(d) et (d') sont **parallèles** si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

Exemple(s) :

$(d) \ : \ 1x + 2y + 2 = 0$ — $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(d') \ : \ 4x - 3y + 16 = 0$ — $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(d'') \ : \ -2x - 4y + 7 = 0$ — $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{w} = -2\vec{u}$ donc (d) et (d') sont parallèles. Par contre (d') n'est pas parallèle aux deux autres droites.

Autrice : Clémentine SCOHY - Mail : clementine.scohy.prof@protonmail.com - Sources : voir « madame-scohy.fr/lycee/sources »